

**Figura 2** (a) en el intervalo  $\Delta t$  de  $t_1$  a  $t_2$ , la partícula se mueve de la posición  $r_1$  a la posición  $r_2$ . Su desplazamiento en ese intervalo es  $\Delta r = r_2 - r_1$ . (b) A medida que decrece el intervalo, el vector desplazamiento tiende a la trayectoria real de la partícula.

Nótese que los tres vectores,  $r_1$ ,  $\Delta r$ , y  $r_2$  guardan la misma relación que los tres vectores  $a$ ,  $b$ , y  $s$  de la figura 3 del capítulo 3. Esto es, usando el método gráfico de sumar cabeza-en cola,  $\Delta r$  sumada a  $r_1$  da la resultante  $r_2$ . Así,  $r_2 = \Delta r + r_1$ , y, por lo tanto,  $\Delta r = r_2 - r_1$ .

Cuando se reduce el intervalo  $\Delta t$ , el vector  $\Delta r$  tiende a la trayectoria real (como en la figura 2b), y resulta tangente a la trayectoria en el límite  $\Delta t \rightarrow 0$ , en cuyo caso la velocidad promedio tiende a la velocidad instantánea  $v$ :

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} \quad (3)$$

Por una extensión razonable de nuestra primera definición de la derivada (véase la Ec. 8 del capítulo 2), escribimos la cantidad del lado derecho de la ecuación 3 como la derivada del vector  $r$  respecto al tiempo:

$$v = \frac{dr}{dt} \quad (4)$$

Al igual que el vector  $\Delta r$  en el límite  $\Delta t \rightarrow 0$ , el vector  $v$  es tangente a la trayectoria de la partícula en cualquier punto del movimiento.

La ecuación 4, como todas las ecuaciones vectoriales, es equivalente a tres ecuaciones escalares. Para explorar esto, escribimos  $v$  en términos de sus componentes y los sustituimos en la ecuación 4 en lugar de  $r$  de la ecuación 1:

$$\begin{aligned} v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j} + v_z \mathbf{k} &= \frac{d}{dt} (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) \\ &= \frac{dx}{dt} \mathbf{i} + \frac{dy}{dt} \mathbf{j} + \frac{dz}{dt} \mathbf{k}. \end{aligned} \quad (5)$$

Ya que dos vectores sólo pueden ser iguales si sus componentes correspondientes son iguales, al comparar los lados izquierdo y derecho de la ecuación 5 vemos que

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt} \quad (6)$$

Para resumir, la sola relación vectorial de la ecuación 4 es totalmente equivalente a las tres relaciones escalares de la ecuación 6.

Extenderemos ahora directamente estos conceptos a la aceleración, como lo hicimos en la sección 2-5. La aceleración promedio es

$$\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t}, \quad (7)$$

y la aceleración instantánea se obtiene del límite cuando tiende a cero el intervalo de tiempo:

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}. \quad (8)$$

Una vez más, la cantidad de la derecha puede expresarse como una derivada respecto al tiempo, y así

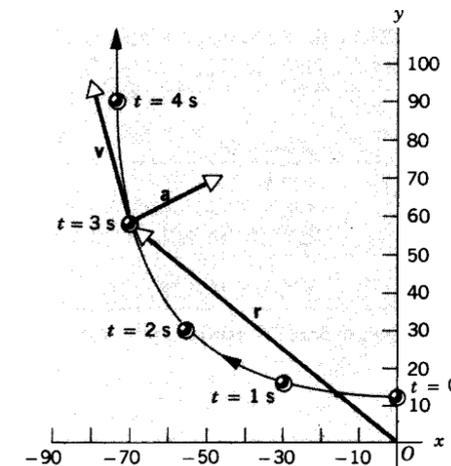
$$a = \frac{dv}{dt}, \quad (9)$$

donde, otra vez igualando componentes,

$$a_x = \frac{dv_x}{dt}, \quad a_y = \frac{dv_y}{dt}, \quad a_z = \frac{dv_z}{dt}. \quad (10)$$

Nótese que las ecuaciones vectoriales sirven tanto para simplificar la notación (la ecuación 9, por ejemplo, representa las tres relaciones dadas como ecuación 10) como para separar las componentes ( $a_x$ , por ejemplo, no tiene efecto sobre  $v_y$  o sobre  $v_z$ ).

Igualmente, note de la ecuación 9 que, a causa de que  $v$  es un vector que tiene tanto dirección como magnitud, un cambio en la dirección de la velocidad puede producir una aceleración, aun si la magnitud de la velocidad no cambia. El movimiento a velocidad constante puede ser un movimiento acelerado. Esto es, puesto que  $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$ , las componentes pueden cambiar de tal manera que la magnitud de  $v$  permanezca constante. El ejemplo más conocido de este caso es el movimiento circular uniforme, que estudiaremos en la sección 4-4.



**Figura 3** Problema muestra 1. Se muestra la trayectoria de una partícula en movimiento, y se indican sus posiciones para  $t = 0, 1, 2, 3$ , y  $4$  s. Para  $t = 3$  s, se muestran los vectores que representan su posición, su velocidad, y su aceleración. Nótese que no existe una relación particular entre las direcciones de  $r$ ,  $v$ , y  $a$ .

lo largo de cada una de las tres direcciones perpendiculares. La partícula se mueve, en general, a lo largo de una trayectoria curva. Esto puede ser así, aun si una de las componentes de la aceleración, digamos  $a_x$ , es cero, ya que entonces la componente correspondiente de la velocidad, digamos  $v_x$ , tiene un valor constante que pudiera no ser cero. Un ejemplo de esta última situación es el movimiento de un proyectil que sigue una trayectoria curva en un plano vertical y, despreciando los efectos de la resistencia del aire, está sujeto a una aceleración constante  $g$  dirigida hacia abajo a lo largo del eje vertical solamente.

Podemos obtener las ecuaciones generales para el movimiento con  $a$  constante simplemente haciendo que

$$a_x = \text{constante}, \quad a_y = \text{constante}, \quad \text{y} \quad a_z = \text{constante}$$

La partícula comienza en  $t = 0$  con una posición inicial  $r_0 = x_0 \mathbf{i} + y_0 \mathbf{j} + z_0 \mathbf{k}$  y una velocidad inicial  $v_0 = v_{x0} \mathbf{i} + v_{y0} \mathbf{j} + v_{z0} \mathbf{k}$ . Procedamos ahora como lo hicimos en la sección 2-6 y desarrollemos, en analogía con la ecuación 15 del capítulo 2, tres ecuaciones escalares:  $v_x = v_{x0} + a_x t$ ,  $v_y = v_{y0} + a_y t$ , y  $v_z = v_{z0} + a_z t$ , las cuales escribimos como la ecuación vectorial única

$$v = v_0 + at. \quad (11)$$

Cuando usemos ésta o cualquier otra ecuación vectorial, recordemos que representa a tres ecuaciones escalares independientes.

El segundo término del lado derecho de la ecuación 11 implica la multiplicación de un vector por un escalar. Como discutimos en la sección 3-5, esto da un vector de

**Problema muestra 1** Una partícula se mueve en un plano  $xy$  de modo tal que sus coordenadas  $x$  y  $y$  varían con el tiempo de acuerdo con  $x(t) = t^3 - 32t$  y  $y(t) = 5t^2 + 12$ . Aquí  $x$  y  $y$  están en unidades de metros cuando  $t$  está en unidades de segundos. Halle la posición, la velocidad, y la aceleración de la partícula cuando  $t = 3$  s.

**Solución** La posición está dada por la ecuación 1, e insertando las expresiones dadas para  $x(t)$  y  $y(t)$ , obtenemos

$$r = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} = (t^3 - 32t)\mathbf{i} + (5t^2 + 12)\mathbf{j}.$$

Evaluando esta expresión para  $t = 3$  s nos da

$$r = -69\mathbf{i} + 57\mathbf{j},$$

donde las componentes están en unidades de metros.

Las componentes de la velocidad se hallan de la ecuación 6:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt} (t^3 - 32t) = 3t^2 - 32,$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt} (5t^2 + 12) = 10t.$$

Usando la ecuación 5, obtenemos

$$v = v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j} = (3t^2 - 32)\mathbf{i} + 10t\mathbf{j},$$

y para  $t = 3$  s hallamos a

$$v = -5\mathbf{i} + 30\mathbf{j}$$

en unidades de m/s.

Las componentes de la aceleración son:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d}{dt} (3t^2 - 32) = 6t,$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d}{dt} (10t) = 10.$$

La aceleración para  $t = 3$  s es

$$a = 18\mathbf{i} + 10\mathbf{j}$$

en unidades de  $m/s^2$ .

La figura 3 muestra la trayectoria de la partícula desde  $t = 0$  hasta  $t = 4$  s. Se han trazado en ella los vectores de posición, velocidad, y aceleración para  $t = 3$  s. Nótese que  $v$  es tangente a la trayectoria para  $t = 3$  s, y también que la dirección de  $a$  no tiene una relación particular con la dirección ya sea de  $r$  o de  $v$ .

## 4-2 MOVIMIENTO CON ACELERACIÓN CONSTANTE

Consideraremos ahora el caso especial del movimiento con aceleración constante. Al moverse la partícula, la aceleración  $a$  no varía ni en magnitud ni en dirección. Por lo tanto, las componentes de  $a$  tampoco varían. Tenemos entonces una situación que puede describirse como la suma de tres componentes del movimiento que se presentan en forma simultánea con una aceleración constante a

**TABLA 1 ECUACIONES VECTORIALES PARA EL MOVIMIENTO CON ACELERACION CONSTANTE**

Número de la ecuación	Ecuación	Contiene				
		r	v <sub>0</sub>	v	a	t
11	$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{a}t$	X	✓	✓	✓	✓
12	$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0t + \frac{1}{2}\mathbf{a}t^2$	✓	✓	X	✓	✓
13†	$\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{v}_0 + 2\mathbf{a} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$	✓	✓	✓	✓	X
14	$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \frac{1}{2}(\mathbf{v}_0 + \mathbf{v})t$	✓	✓	✓	X	✓
15	$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}t - \frac{1}{2}\mathbf{a}t^2$	✓	X	✓	✓	✓

† Esta ecuación incluye el producto escalar o producto punto de dos vectores, que ya hemos visto en la sección 3-5.

longitud  $at$  que apunta en la misma dirección que el vector original  $\mathbf{a}$ .

Continuando como lo hicimos en la sección 2-6, podemos desarrollar cinco ecuaciones que describan el movimiento en tres dimensiones con aceleración constante. Estas cinco ecuaciones se muestran en la tabla 1, la cual deberá compararse con las cinco ecuaciones unidimensionales correspondientes en la tabla 2 del capítulo 2. Con excepción de la ecuación 13, que incluye vectores aunque es una ecuación escalar, cada ecuación de la tabla 1 representa a tres ecuaciones escalares independientes. Las componentes  $x$  de las ecuaciones 11, 12, 14, y 15 son precisamente las ecuaciones correspondientes listadas en la tabla 2 del capítulo 2. Ya que la ecuación 13 es una ecuación escalar, *no tiene componente x (o cualquier otra)*.

**Problema muestra 2** Un esquiador desciende por una pendiente plana de la ladera de una montaña. La pendiente de descenso (norte-sur) forma un ángulo de  $10^\circ$  con la horizontal. Un viento que sopla desde el oeste da al esquiador una aceleración lateral de  $0.54 \text{ m/s}^2$  (véase la Fig. 4). En la esquina noroeste de la pendiente, el esquiador sale con una componente de la

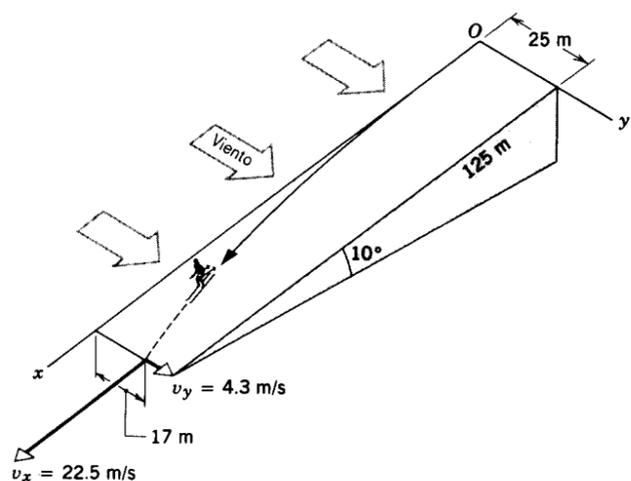


Figura 4 Problema muestra 2.

velocidad de  $9.0 \text{ m/s}$  cuesta abajo y una componente lateral de cero. La pendiente sin fricción tiene  $125 \text{ m}$  de longitud y  $25 \text{ m}$  de ancho. (a) ¿Dónde deja el esquiador la pendiente? (b) ¿Cuál es la velocidad del esquiador en este punto? (Sugerencia: La aceleración gravitatoria a lo largo de un plano que se inclina en un ángulo  $\theta$  es  $g \text{ sen } \theta$ .)

**Solución** (a) Elijamos el origen en la esquina noroeste, con el eje  $x$  cuesta abajo y el eje  $y$  lateral. Las componentes de la aceleración son

$$a_x = g \text{ sen } 10^\circ = 1.70 \text{ m/s}^2,$$

$$a_y = 0.54 \text{ m/s}^2.$$

Nótese que estas componentes son evaluadas independientemente. La componente  $a_x$  es la aceleración cuesta abajo que resultaría aun si no hubiese viento lateral, y similarmente  $a_y$  es la aceleración lateral que resultaría del viento, aun cuando no hubiese una pendiente. El manejo de estas dos componentes de manera independiente es la esencia de la aritmética vectorial.

Tomemos  $t = 0$  como el tiempo en que el esquiador se empuja, y se nos da que  $v_{x0} = 9.0 \text{ m/s}$  y que  $v_{y0} = 0$ . Entonces

$$v_x = v_{x0} + a_x t = 9.0 \text{ m/s} + (1.70 \text{ m/s}^2)t,$$

$$v_y = v_{y0} + a_y t = 0 + (0.54 \text{ m/s}^2)t,$$

$$x = x_0 + v_{x0}t + \frac{1}{2}a_x t^2 = 0 + (9.0 \text{ m/s})t + (0.85 \text{ m/s}^2)t^2,$$

$$y = y_0 + v_{y0}t + \frac{1}{2}a_y t^2 = 0 + 0 + (0.27 \text{ m/s}^2)t^2.$$

Suponemos por ahora que el esquiador llega al fondo de la pendiente antes de dejar el borde lateral. (Podemos comprobar esta hipótesis más adelante.) Primero hallamos el tiempo en que esto ocurre (esto es, cuando  $x = 125 \text{ m}$ ):

$$125 \text{ m} = (9.0 \text{ m/s})t + (0.85 \text{ m/s}^2)t^2.$$

Resolviendo la cuadrática, tenemos que  $t = 7.94 \text{ s}$  o  $-18.5 \text{ s}$ . Considerando por el momento sólo la raíz positiva, evaluamos la coordenada  $y$  correspondiente:

$$y = (0.27 \text{ m/s}^2)t^2 = (0.27 \text{ m/s}^2)(7.94 \text{ s})^2 = 17.0 \text{ m}.$$

El desplazamiento lateral de  $17.0 \text{ m}$  es realmente menor que la anchura de la pendiente ( $25 \text{ m}$ ), como hemos supuesto. El esquiador, por lo tanto, deja el fondo de la pendiente en un punto a  $17.0 \text{ m}$  del borde oeste.

(b) Las componentes de la velocidad pueden obtenerse directamente para  $t = 7.94 \text{ s}$ :

$$v_x = 9.0 \text{ m/s} + (1.70 \text{ m/s}^2)(7.94 \text{ s}) = 22.5 \text{ m/s},$$

$$v_y = (0.54 \text{ m/s}^2)(7.94 \text{ s}) = 4.3 \text{ m/s}.$$

Nótese que para resolver este problema hemos elegido que los ejes  $x$  y  $y$  estén en el plano de la pendiente, reduciendo por lo tanto un problema tridimensional a dos dimensiones. De haber escogido trabajar en un sistema de coordenadas en que el plano  $xy$  fuera horizontal y el eje  $z$  fuera vertical, la aceleración tendría tres componentes y el problema habría sido más complicado. Al resolver problemas, usualmente estamos en libertad de elegir la dirección de los ejes de coordenadas y la ubicación del origen a nuestra conveniencia, siempre que mantengamos de manera fija nuestra elección a través de toda la solución del problema.

¿Qué pasa con la raíz negativa,  $t = -18.5 \text{ s}$ ? Escribimos nuestras ecuaciones originales del movimiento comenzando en el tiempo 0, de modo que son tiempos positivos aquellos que describen el movimiento siguiente del esquiador al bajar la pendiente, y los tiempos negativos deben, por lo tanto, describir el movimiento del esquiador *antes* de pasar por la esquina de la pendiente que definimos como el origen. La solución negativa nos recuerda que pudiera haber habido una trayectoria previa que el esquiador pudiera haber seguido para pasar a través del origen en  $t = 0$  con la velocidad correcta. Durante esta parte previa del movimiento, el esquiador habría pasado a través de  $x = 125 \text{ m}$  (presumiblemente ¡esquiando cuesta arriba!) a los  $18.5 \text{ s}$  antes de llegar a la esquina noroeste. Calcule los componentes de la velocidad para  $t = -18.5 \text{ s}$  y halle lo concerniente al movimiento del esquiador durante ese tiempo. ¿Cuál debería haber sido la coordenada  $y$  correspondiente a  $t = -18.5 \text{ s}$ ? ¿Es esto razonable? ¿Cuáles hubieran sido las coordenadas  $x$  y  $y$  mínimas alcanzadas durante el tiempo entre  $t = -18.5 \text{ s}$  y  $t = 0$ ?

La solución matemática de un problema físico a menudo tiene un resultado inesperado, tal como el tiempo negativo en este ejemplo. Si supusiéramos en este problema que el movimiento del esquiador empezó en  $t = 0$ , la raíz negativa carecería de interés para nosotros, pero siempre es una buena práctica examinar el significado físico de tales soluciones cuando éstas aparecen.

### 4-3 MOVIMIENTO DE PROYECTILES

Un ejemplo de movimiento con aceleración constante es el movimiento de un proyectil. Se trata del movimiento bidimensional de una partícula lanzada oblicuamente en el aire. El movimiento ideal de una pelota de béisbol o de una pelota de golf es un ejemplo del movimiento de un proyectil. Suponemos por ahora que podemos despreciar el efecto del aire en este movimiento. En el capítulo 6 consideraremos el efecto (a menudo considerable) de la resistencia del aire en el movimiento de un proyectil.

El movimiento de un proyectil es aquél de aceleración constante  $g$ , dirigido hacia abajo. Aun cuando puede haber una componente horizontal de la velocidad, no hay una componente horizontal de la aceleración. Si elegimos un

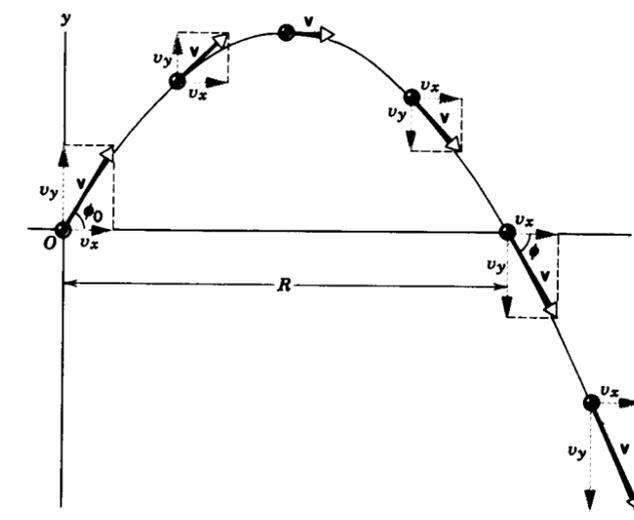


Figura 5 La trayectoria de un proyectil, mostrando la velocidad inicial  $\mathbf{v}_0$  y sus componentes así como también la velocidad  $\mathbf{v}$  y sus componentes en cinco tiempos posteriores. Nótese que  $v_x = v_{x0}$  durante el vuelo. La distancia horizontal  $R$  es el alcance del proyectil.

sistema de coordenadas con el eje  $y$  positivo verticalmente hacia arriba, podemos poner  $a_y = -g$  (como en el capítulo 2,  $g$  es siempre un número *positivo*) y  $a_x = 0$ . Más aún, suponemos que  $\mathbf{v}_0$  está en el plano  $xy$ , de modo que  $v_{z0} = 0$ . Puesto que  $a_z$  es también 0, la componente de la ecuación 11 nos dice que  $v_z$  es cero en todo momento y podemos, por tanto, centrar nuestra atención a lo que sucede en el plano  $xy$ .

Elijamos además que el origen de nuestro sistema de coordenadas sea el punto en el cual el proyectil comienza su vuelo (véase la Fig. 5). Por lo tanto, el origen es el punto en que la pelota deja la mano del lanzador, por ejemplo. Esta elección del origen implica que  $x_0 = y_0 = 0$ . La velocidad en  $t = 0$ , el instante en que el proyectil comienza su vuelo, es  $\mathbf{v}_0$ , que forma un ángulo  $\phi_0$  con la dirección  $x$  positiva. Las componentes  $x$  y  $y$  de  $\mathbf{v}_0$  (véase la Fig. 5) son, entonces,

$$v_{x0} = v_0 \cos \phi_0 \quad \text{y} \quad v_{y0} = v_0 \sin \phi_0. \quad (16)$$

Ya que no hay una componente horizontal de la aceleración, la componente horizontal de la velocidad es constante. Para la componente  $x$  de la ecuación 11 establecemos que  $a_x = 0$  y  $v_{x0} = v_0 \cos \phi_0$ , obteniendo

$$v_x = v_{x0} + a_x t = v_0 \cos \phi_0. \quad (17)$$

*La componente horizontal de la velocidad retiene su valor inicial durante el vuelo.*

La componente vertical de la velocidad cambia con el tiempo debido a la aceleración constante hacia abajo. En

la ecuación 11, tomamos a las componentes  $y$  y establecemos que  $a_y = -g$  y  $v_{y0} = v_0 \text{ sen } \phi_0$ , de modo que

$$v_y = v_{y0} + a_y t = v_0 \text{ sen } \phi_0 - gt. \quad (18)$$

La componente vertical de la velocidad es la de la caída libre. (En efecto, si viéramos el movimiento de la figura 5 desde un marco de referencia que se mueva a la derecha con una velocidad  $v_{x0}$ , el movimiento sería el de un objeto lanzado vertical hacia arriba con una velocidad inicial  $v_0 \text{ sen } \phi_0$ .)

La magnitud del vector resultante de la velocidad en cualquier instante es

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}. \quad (19)$$

El ángulo  $\phi$  que el vector de la velocidad forma con la horizontal en ese instante está dado por

$$\tan \phi = \frac{v_y}{v_x}. \quad (20)$$

El vector velocidad es tangente a la trayectoria de la partícula en todo punto, como se muestra en la figura 5.

La coordenada  $x$  de la posición de la partícula en cualquier momento, obtenida de la componente  $x$  de la ecuación 12 (véase la tabla 1), con  $x_0 = 0$ ,  $a_x = 0$ , y  $v_{x0} = v_0 \text{ cos } \phi_0$ , es

$$x = x_0 + v_{x0}t + \frac{1}{2}a_x t^2 = (v_0 \text{ cos } \phi_0)t. \quad (21)$$

La coordenada  $y$ , obtenida de la componente  $y$  de la ecuación 12 con  $y_0 = 0$ ,  $a_y = -g$ , y  $v_{y0} = v_0 \text{ sen } \phi_0$ , es

$$y = y_0 + v_{y0}t + \frac{1}{2}a_y t^2 = (v_0 \text{ sen } \phi_0)t - \frac{1}{2}gt^2. \quad (22)$$

Las ecuaciones 21 y 22 nos dan  $x$  y  $y$  en función del parámetro común  $t$ , el tiempo de vuelo. Combinándolas y eliminando a  $t$  de ellas, obtenemos

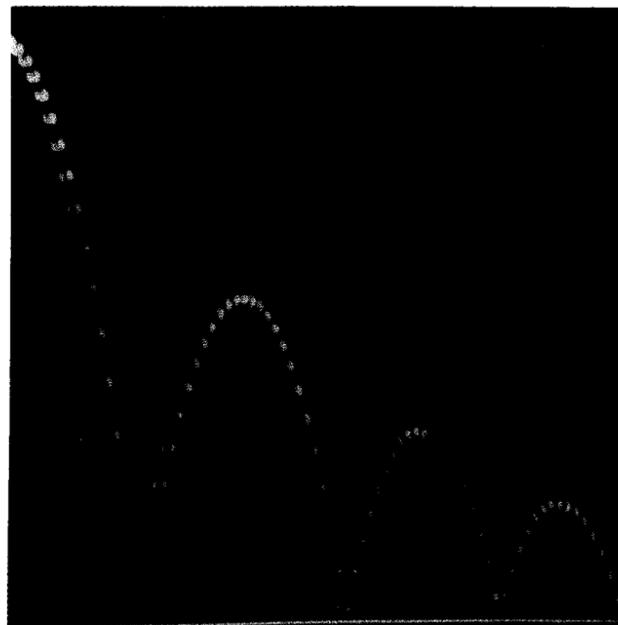
$$y = (\tan \phi_0)x - \frac{g}{2(v_0 \text{ cos } \phi_0)^2} x^2, \quad (23)$$

la cual relaciona a  $y$  con  $x$  y es la ecuación de la *trayectoria* del proyectil. Puesto que  $v_0$ ,  $\phi_0$ , y  $g$  son constantes, esta ecuación tiene la forma

$$y = bx - cx^2,$$

que es la ecuación de una parábola. De aquí que la trayectoria de un proyectil sea parabólica, como lo mostramos en la figura 5.

El *alcance horizontal*  $R$  del proyectil, como se muestra en la figura 5, se define como la distancia a lo largo de la horizontal cuando el proyectil retorna al nivel desde el cual fue lanzado. Podemos hallar el alcance poniendo  $y = 0$  en la ecuación 23. Cuando  $x = 0$  surge una solución inmediata; la otra nos da el alcance:



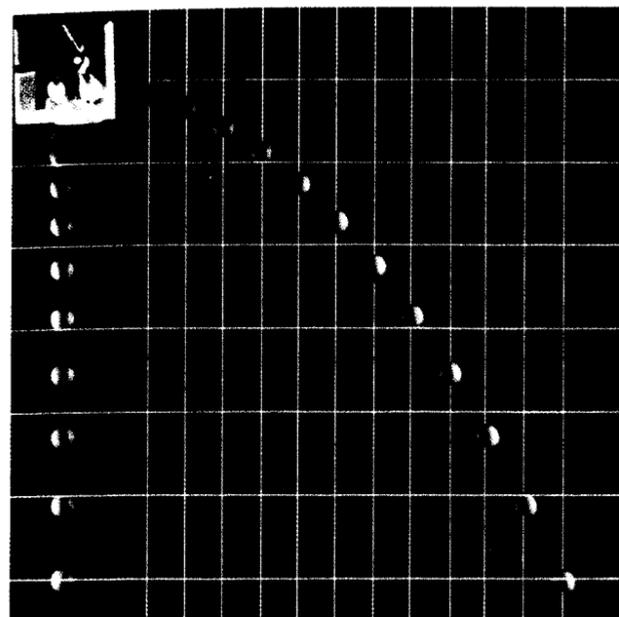
**Figura 6** Una fotografía estroboscópica de una pelota de golf (que entra a la foto desde la izquierda) rebotando sobre una superficie dura. Entre los impactos, la pelota muestra la trayectoria parabólica característica del movimiento de un proyectil. ¿Por qué supone usted que la altura de los rebotes sucesivos está decreciendo? (Los capítulos 8 y 10 pueden dar la respuesta.)

$$\begin{aligned} R &= \frac{2v_0^2}{g} \text{ sen } \phi_0 \text{ cos } \phi_0 \\ &= \frac{v_0^2}{g} \text{ sen } 2\phi_0, \end{aligned} \quad (24)$$

usando la identidad trigonométrica  $\text{sen } 2\theta = 2 \text{ sen } \theta \text{ cos } \theta$ . Nótese que, para una velocidad inicial dada, obtenemos el alcance máximo cuando  $\phi_0 = 45^\circ$ , que es cuando  $\text{sen } 2\phi_0 = 1$ .

Las soluciones que hemos obtenido representan una visión idealizada del movimiento de un proyectil. Hemos considerado un efecto importante: la gravedad; pero existe otro factor en el movimiento de un proyectil que a menudo es importante, y es la resistencia del aire. La resistencia del aire es un ejemplo de una fuerza dependiente de la velocidad; cuanto mayor sea la velocidad mayor será el efecto de desaceleración de la resistencia del aire. A baja velocidad, el efecto de la resistencia del aire es usualmente despreciable, pero a alta velocidad la trayectoria de un proyectil ya no describe una parábola, como en la ecuación 23, y el alcance puede ser considerablemente menor que el dado por la ecuación 24. En el capítulo 6 consideraremos los efectos de la resistencia del aire; por ahora supondremos que las ecuaciones derivadas en esta sección describen adecuadamente el movimiento de los proyectiles.

La figura 6 muestra un ejemplo de la trayectoria de un proyectil que no es afectado severamente por la resis-



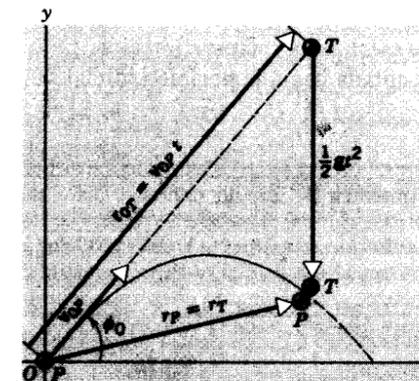
**Figura 7** La bola I se deja caer desde el reposo en el mismo instante en que la bola II es disparada hacia la derecha. Nótese que ambas bolas caen a exactamente la misma tasa; el movimiento horizontal de la bola II no afecta su tasa vertical de caída. En esta fotografía estroboscópica, las exposiciones fueron tomadas a intervalos de 1/30 s. ¿Parece ser constante la velocidad horizontal de la bola II?

cia del aire. La trayectoria ciertamente parece de forma parabólica. La figura 7 muestra una comparación de los movimientos de un proyectil disparado horizontalmente y otro dejado caer en forma simultánea en caída libre. Aquí pueden verse directa las predicciones de las ecuaciones 21 y 22 cuando  $\phi_0 = 0$ . Nótese que (1) el movimiento horizontal del primer proyectil responde realmente a la ecuación 21: su coordenada  $x$  aumenta cantidades iguales en intervalos de tiempo iguales, independientemente del movimiento en  $y$ , y (2) los movimientos  $y$  de los dos proyectiles son idénticos: los aumentos verticales de la posición de los dos proyectiles es la misma, independientemente del movimiento horizontal de uno de ellos.

### Disparo hacia un blanco en caída

En una magnífica demostración durante una conferencia, una pistola de aire es apuntada hacia un blanco elevado, el cual se deja caer en caída libre por un mecanismo de disparo mientras la "bala" sale de la boca del arma. Independientemente de la velocidad inicial de la bala, siempre da en el blanco mientras éste cae.

La manera más sencilla de entender esto es la siguiente. Si no existiera la aceleración debida a la gravedad, el



**Figura 8** En el movimiento de un proyectil, su desplazamiento desde el origen para cualquier tiempo  $t$  puede considerarse como la suma de dos vectores:  $v_0 t$ , dirigido a lo largo de  $v_0$ , y  $\frac{1}{2}gt^2$ , dirigido hacia abajo.

blanco no caería y la bala se movería a lo largo de la línea de mira directa hacia el blanco (Fig. 8). El efecto de la gravedad es causar que cada cuerpo acelere hacia abajo a la misma tasa desde la posición que de otro modo habría tenido. Por lo tanto, en el tiempo  $t$ , la bala caerá a una distancia de  $\frac{1}{2}gt^2$  desde la posición que tendría a lo largo de la línea de mira y el blanco caerá la misma distancia desde su posición inicial. Cuando la bala alcanza la línea de caída del blanco, estará a la misma distancia abajo de la posición inicial del blanco, y de aquí la colisión. Si la bala se mueve más rápido de lo que se muestra en la figura ( $v_0$  más grande), tendría un alcance mayor y cruzaría la línea de caída en un punto más alto; pero puesto que llega allí más pronto, el blanco caerá una distancia correspondiente más pequeña en el mismo tiempo y chocará con ella. Un argumento similar sirve también para velocidades más lentas.

Para un análisis equivalente, usemos la ecuación 12

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t + \frac{1}{2}\mathbf{a}t^2$$

para describir las posiciones del proyectil y del blanco en cualquier tiempo  $t$ . Para el proyectil  $P$ ,  $\mathbf{r}_0 = 0$  y  $\mathbf{a} = \mathbf{g}$ , y tendremos que

$$\mathbf{r}_P = \mathbf{v}_{0P}t + \frac{1}{2}\mathbf{g}t^2.$$

Para el blanco  $T$ ,  $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_{0T}$ ,  $\mathbf{v}_0 = 0$ , y  $\mathbf{a} = \mathbf{g}$ , conduciendo a

$$\mathbf{r}_T = \mathbf{r}_{0T} + \frac{1}{2}\mathbf{g}t^2.$$

Si hay una colisión, debemos tener que  $\mathbf{r}_P = \mathbf{r}_T$ . La inspección demuestra que esto siempre ocurrirá en un tiempo  $t$  dado por  $\mathbf{r}_{0T} = \mathbf{v}_{0P}t$ , esto es, en el tiempo  $t (= r_{0T}/v_{0P})$  que le tomaría a un proyectil no acelerado viajar a la posición del blanco a lo largo de la línea de mira. A causa de que multiplicar un vector por un escalar nos da otro vector en

la misma dirección, la ecuación  $r_{OT} = v_{OP}t$  nos dice que  $r_{OT}$  y  $v_{OP}$  deben estar en la misma dirección. Esto es, el arma debe ser apuntada hacia la posición inicial del blanco.

**Problema muestra 3** En un concurso para dejar caer un paquete sobre un blanco, el aeroplano de uno de los concursantes está volando horizontalmente a una velocidad constante de 155 km/h y a una altura de 225 m hacia un punto directamente arriba del blanco. ¿A qué ángulo de mira  $\alpha$  debería ser soltado el paquete para que éste dé en el blanco (Fig. 9)?

**Solución** Elegimos un marco de referencia fijo con respecto a la Tierra, siendo su origen  $O$  el punto de liberación. El movimiento del paquete en el momento de la liberación es el mismo que el del aeroplano. Por tanto, la velocidad inicial  $v_0$  del paquete es horizontal y su magnitud es 155 km/h. El ángulo de proyección  $\phi_0$  es cero.

Hallamos el tiempo de la caída por medio de la ecuación 22. Con  $x = \phi_0 = 0$  y  $y = -225$  m esto nos da

$$t = \sqrt{\frac{-2y}{g}} = \sqrt{\frac{2(-225 \text{ m})}{9.8 \text{ m/s}^2}} = 6.78 \text{ s.}$$

Nótese que el tiempo de caída no depende de la velocidad del aeroplano con una proyección horizontal. (Véase, sin embargo, el problema 38.)

La distancia horizontal recorrida por el paquete en este tiempo está dada por la ecuación 21:

$$x = v_{x0}t = (155 \text{ km/h})(1 \text{ h}/3600 \text{ s})(6.78 \text{ s}) = 0.292 \text{ km} = 292 \text{ m,}$$

de modo que el ángulo de mira (Fig. 9) sería

$$\alpha = \tan^{-1} \frac{x}{|y|} = \tan^{-1} \frac{292 \text{ m}}{225 \text{ m}} = 52^\circ.$$

¿Parecerá parabólico el movimiento del paquete cuando es visto desde un marco de referencia fijo respecto al aeroplano? (¿Puede usted recordar haber visto películas en que las bombas caían desde un aeroplano, tomadas por una cámara, ya sea desde ese aeroplano o desde otro aeroplano que volara en un curso paralelo con la misma velocidad?)

**Problema muestra 4** Un jugador de fútbol soccer patea un balón con un ángulo de  $36^\circ$  respecto a la horizontal y una velocidad inicial de 15.5 m/s. Suponiendo que el balón se mueva en un plano vertical, halle (a) el tiempo  $t_1$  en que el balón llega al punto más alto de su trayectoria, (b) su altura máxima, (c) su alcance y tiempo de vuelo, y (d) su velocidad cuando llegue al suelo.

**Solución** (a) En el punto más alto, la componente vertical de la velocidad  $v_y$  es cero. Resolviendo la ecuación 18 para  $t$ , obtenemos:

$$t = \frac{v_0 \sin \phi_0 - v_y}{g}$$

Con

$$v_y = 0, \quad v_0 = 15.5 \text{ m/s}, \quad \phi_0 = 36^\circ, \quad g = 9.8 \text{ m/s}^2,$$

tenemos que

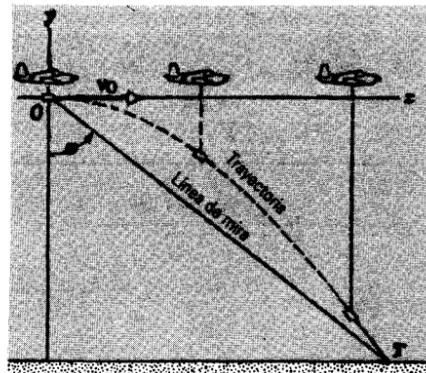


Figura 9 Problema muestra 3.

$$t_1 = \frac{(15.5 \text{ m/s})(\sin 36^\circ)}{9.8 \text{ m/s}^2} = 0.93 \text{ s.}$$

(b) La altura máxima es alcanzada en  $t = 0.93$  s. Usando la ecuación 22,

$$y = (v_0 \sin \phi_0)t - \frac{1}{2}gt^2,$$

tenemos

$$y_{\text{máx}} = (15.5 \text{ m/s})(\sin 36^\circ)(0.93 \text{ s}) - \frac{1}{2}(9.8 \text{ m/s}^2)(0.93 \text{ s})^2 = 4.2 \text{ m}$$

(c) El alcance  $R$  puede ser obtenido por la ecuación 24:

$$R = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\phi_0 = \frac{(15.5 \text{ m/s})^2}{9.8 \text{ m/s}^2} \sin 72^\circ = 23.3 \text{ m.}$$

Ponemos  $y = 0$  en la ecuación 22 y hallamos el tiempo  $t_2$  en que el balón retorna al suelo. Obtenemos

$$t_2 = \frac{2v_0 \sin \phi_0}{g} = \frac{2(15.5 \text{ m/s})(\sin 36^\circ)}{9.8 \text{ m/s}^2} = 1.86 \text{ s.}$$

Nótese que  $t_2 = 2t_1$ , lo cual debe ocurrir porque se requiere el mismo tiempo para que el balón suba (llegue a su máxima altura desde el suelo) que el requerido para que el balón baje (llegue al suelo desde su máxima altura).

Podemos verificar estos resultados para que exista compatibilidad con  $x = x_0 + v_{x0}t$ . Cuando  $t = t_2$ ,  $x$  será igual a  $R$ . Entonces, según la ecuación 21,  $R = v_{x0}t_2 = (v_0 \cos \phi_0)t_2 = 23.3 \text{ m}$ , como se esperaba.

(d) Para hallar la velocidad del balón cuando llegue al suelo, usemos la ecuación 17 para obtener  $v_x$ , la cual permanece constante durante todo el trayecto:

$$v_x = v_0 \cos \phi_0 = (15.5 \text{ m/s})(\cos 36^\circ) = 12.5 \text{ m/s,}$$

y, según la ecuación 18, obtenemos  $v_y$  para  $t = t_2$ .

$$v_y = v_0 \sin \phi_0 - gt = (15.5 \text{ m/s})(\sin 36^\circ) - (9.8 \text{ m/s}^2)(1.86 \text{ s}) = -9.1 \text{ m/s.}$$

Así pues, la velocidad tiene una magnitud dada por

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(12.5 \text{ m/s})^2 + (-9.1 \text{ m/s})^2} = 15.5 \text{ m/s,}$$

y una dirección dada por

$$\tan \phi = v_y/v_x = -9.1/12.5,$$

de manera que  $\phi = -36^\circ$ , o sea  $36^\circ$  en el sentido horario del eje  $x$ . Nótese que  $\phi = -\phi_0$ , como esperábamos de la simetría (Fig. 5).

La velocidad final resulta ser igual a la velocidad inicial. ¿Puede usted explicarlo? ¿Es una coincidencia?

### 4-4 MOVIMIENTO CIRCULAR UNIFORME

En el movimiento de proyectiles la aceleración es constante tanto en magnitud como en dirección, pero la velocidad cambia tanto en magnitud como en dirección. Examinaremos ahora el caso especial en que una partícula se mueve a velocidad constante en una trayectoria circular. Como veremos, tanto la velocidad como la aceleración son de magnitud constante, pero ambas cambian de dirección continuamente. Esta situación se llama *movimiento circular uniforme*. Entre los ejemplos de esta clase de movimiento se incluyen a los satélites de la Tierra y a puntos de rotores que giran, tales como ventiladores, discos de fonógrafo y discos de computadora. De hecho, hasta el punto en que podemos vernos a nosotros mismos como partículas, participamos en un movimiento circular uniforme a causa de la rotación de la Tierra.

En la figura 10a se muestra la situación. Sea  $P_1$  la posición de la partícula en el tiempo  $t_1$  y  $P_2$  su posición en el tiempo  $t_2 = t_1 + \Delta t$ . La velocidad en  $P_1$  es  $v_1$ , un vector tangente a la curva en  $P_1$ . La velocidad en  $P_2$  es  $v_2$ , un vector tangente a la curva en  $P_2$ . Los vectores  $v_1$  y  $v_2$  tienen la misma magnitud  $v$ , ya que la velocidad es constante, pero sus direcciones son diferentes. La longitud de la trayectoria descrita durante  $\Delta t$  es la longitud del arco  $P_1P_2$ , que es igual a  $r\phi$  (donde  $\phi$  está medido en radianes) y también a  $v \Delta t$ . Entonces tenemos que

$$r\theta = v \Delta t. \quad (25)$$

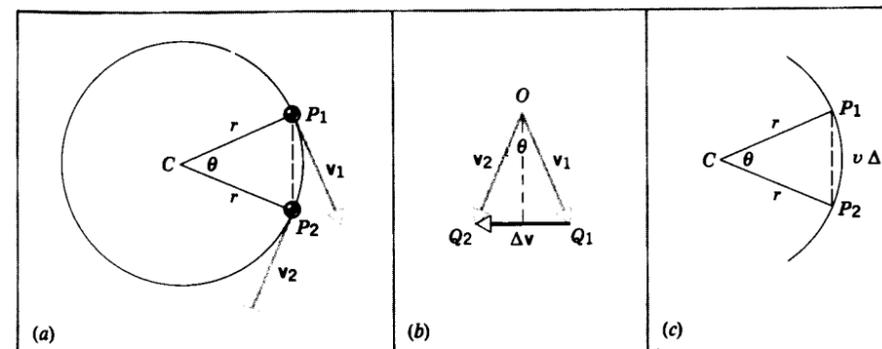


Figura 10 Movimiento circular uniforme. (a) La partícula viaja alrededor de un círculo con velocidad constante. Se muestra su velocidad en dos puntos  $P_1$  y  $P_2$ . (b) El cambio de velocidad, que va de  $P_1$  a  $P_2$ , es  $\Delta v$ . (c) La partícula viaja a lo largo del arco  $P_1P_2$  durante el tiempo  $\Delta t$ .

Podemos ahora trazar a los vectores  $v_1$  y  $v_2$ , como en la figura 10b, de modo que se originen en un punto común. Tenemos la libertad de hacerlo en tanto que la magnitud y la dirección de cada vector sean las mismas que en la figura 10a. La figura 10b nos permite ver claramente el *cambio en la velocidad* al moverse la partícula desde  $P_1$  hasta  $P_2$ . Este cambio,  $v_2 - v_1 = \Delta v$ , es el vector que debe sumarse a  $v_1$  para obtener  $v_2$ . Si representamos el cambio en la velocidad en el intervalo  $P_1P_2$  trazando  $\Delta v$  desde el punto medio del arco  $P_1P_2$ , entonces  $\Delta v$  apuntaría hacia el centro del círculo.

Ahora el triángulo  $OQ_1Q_2$  formado por  $v_1$ ,  $v_2$ , y  $\Delta v$  es semejante al triángulo  $CP_1P_2$  (Fig. 10c) formado por la cuerda  $P_1P_2$  y los radios  $CP_1$  y  $CP_2$ . Esto se debe a que ambos son triángulos isósceles que tienen el mismo ángulo en el vértice; el ángulo  $\theta$  entre  $v_1$  y  $v_2$  es el mismo que el ángulo  $P_1CP_2$  porque  $v_1$  es perpendicular a  $CP_1$  y  $v_2$  es perpendicular a  $CP_2$ . Trazando una bisectriz del ángulo  $\theta$  en la figura 10b, hallamos que

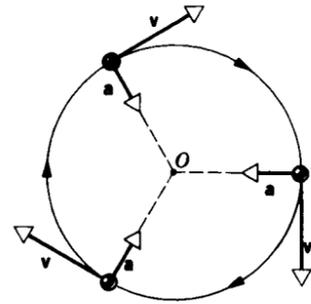
$$\frac{1}{2}\Delta v = v \sin \frac{\theta}{2}. \quad (26)$$

Expresemos ahora la magnitud de la aceleración promedio en el intervalo usando los resultados obtenidos en las ecuaciones 25 y 26 para  $\Delta v$  y  $\Delta t$ :

$$\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{2v \sin (\theta/2)}{r\theta/v} = \frac{v^2 \sin (\theta/2)}{r \theta/2}. \quad (27)$$

Ahora deseamos hallar la aceleración instantánea tomando el límite de esta expresión como  $\Delta t \rightarrow 0$ . Cuando  $\Delta t$  es muy pequeña, el ángulo  $\theta$  es pequeño. En este caso podemos usar la *aproximación de un ángulo pequeño*,  $\sin x \approx x$ . (Esto es válido *solamente* cuando el ángulo está en radianes; por ejemplo, cuando  $x = 5^\circ = 0.0873$  rad,  $\sin x = 0.0872$ .) Entonces, para ángulos pequeños  $\sin (\theta/2) \approx \theta/2$ , y la segunda fracción del lado derecho de la ecuación 27 tiende a 1. Nótese también que, en la primera fracción del lado derecho de la ecuación 27, ni  $v$  ni  $r$  dependen de  $\Delta t$  y así el valor de esta fracción no es afectado por el límite. Por lo tanto, podemos obtener para la magnitud de la aceleración instantánea

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v^2 \sin (\theta/2)}{r \theta/2} = \frac{v^2}{r} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\sin (\theta/2)}{\theta/2}$$



**Figura 11** En el movimiento circular uniforme, la aceleración  $a$  está siempre dirigida hacia el centro del círculo  $y$ , por lo tanto, siempre es perpendicular a  $v$ .

o sea, usando la aproximación del ángulo pequeño para reemplazar al límite restante por 1,

$$a = \frac{v^2}{r} \quad (28)$$

Ya que la dirección de la aceleración promedio es la misma que la de  $\Delta v$ , la dirección de  $a$  está siempre dirigida hacia el centro del círculo o del arco circular en el que se mueve la partícula.

La figura 11 muestra la relación instantánea entre  $v$  y  $a$  en varios puntos del movimiento. La magnitud de  $v$  es constante, pero su dirección cambia continuamente. Esto da lugar a una aceleración  $a$ , que es también constante en su magnitud pero cambia continuamente de dirección. La velocidad  $v$  es siempre tangente al círculo en dirección del movimiento; la aceleración  $a$  está siempre dirigida radialmente hacia adentro. Debido a esto,  $a$  se llama aceleración radial, o *centrípeta*. Centrípeta significa "que busca el centro". En la siguiente sección se da una derivación de la ecuación 28 usando vectores unitarios.

Tanto en caída libre como en el movimiento de un proyectil,  $a$  tiene magnitud y dirección constantes, y podemos usar las ecuaciones desarrolladas para la aceleración constante. No podemos usar estas ecuaciones para el movimiento circular uniforme porque  $a$  varía de dirección  $y$ , por lo tanto, no es constante.

Las unidades de la aceleración centrípeta son las mismas que las de una aceleración como consecuencia de un cambio en la magnitud de una velocidad. Dimensionalmente, tenemos que

$$[a] = \frac{[v^2]}{[r]} = \frac{(L/T)^2}{L} = \frac{L}{T^2},$$

las cuales son las dimensiones usuales de la aceleración. Las unidades pueden ser, por lo tanto,  $m/s^2$ ,  $km/h^2$ , o unidades similares de dimensión  $L/T^2$ .

La aceleración que resulta de un cambio en la dirección de una velocidad es tan real y tan acelerada en esencia como la que resulta de un cambio en la magnitud de una velocidad. Por definición, la aceleración es la rapidez de

cambio de su velocidad con el tiempo, y la velocidad, por ser un vector, puede cambiar tanto en dirección como en magnitud. Si una cantidad física es un vector, sus aspectos direccionales no pueden ser ignorados, ya que esos efectos probarán ser en todos sentidos tan importantes y reales como los producidos por los cambios en la magnitud.

Vale la pena recalcar en este momento que no se necesita que haya algún movimiento en la dirección de una aceleración y que, en lo general, no existe una relación fija entre las direcciones de  $a$  y de  $v$ . En la figura 12 se dan ejemplos en los que el ángulo entre  $v$  y  $a$  varía desde 0 hasta  $180^\circ$ . Sólo en un caso,  $\theta = 0^\circ$ , está el movimiento en la dirección de  $a$ .

**Problema muestra 5** La Luna gira alrededor de la Tierra, haciendo una revolución completa en 27.3 días. Supongamos que la órbita es circular y que tiene un radio de 238,000 millas. ¿Cuál es la magnitud de la aceleración de la Luna hacia la Tierra?

**Solución** Tenemos que  $r = 238,000$  millas  $= 3.82 \times 10^8$  m. El tiempo de una revolución completa, llamado periodo, es  $T = 27.3$  d  $= 2.36 \times 10^6$  s. La velocidad de la Luna (supuesta como constante) es, por lo tanto,

$$v = \frac{2\pi r}{T} = \frac{2\pi(3.82 \times 10^8 \text{ m})}{2.36 \times 10^6 \text{ s}} = 1018 \text{ m/s.}$$

La aceleración centrípeta es

$$a = \frac{v^2}{r} = \frac{(1018 \text{ m/s})^2}{3.82 \times 10^8 \text{ m}} = 0.00271 \text{ m/s}^2, \text{ o tan sólo } 2.76 \times 10^{-4} g_n.$$

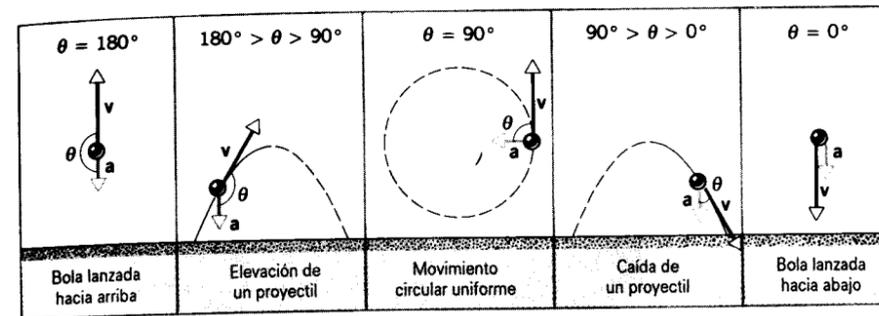
Aquí  $g_n (= 9.80665 \text{ m/s}^2)$  es un valor patrón de  $g$  aceptado internacional. Representa el valor aproximado de la aceleración en caída libre al nivel del mar y a una latitud de  $45^\circ$ . Este valor patrón se usa a menudo como una medida alternativa de la aceleración. Por ejemplo, la aceleración experimentada por los pilotos de aviones de propulsión a chorro o por los parroquianos en los juegos de un parque de diversiones se expresa a menudo de esta manera.

**Problema muestra 6** Calcule la velocidad de un satélite de la Tierra, suponiendo que está viajando a una altitud  $h$  de 210 km, donde  $g = 9.2 \text{ m/s}^2$ . (Este valor es menor que  $9.8 \text{ m/s}^2$ , porque  $g$  decrece con la altitud sobre la Tierra, como estudiaremos en el capítulo 16). El radio  $R$  de la Tierra es de 6370 km.

**Solución** Al igual que cualquier objeto libre cercano a la superficie de la Tierra, el satélite tiene una aceleración  $g$  hacia el centro de la Tierra. Es esta aceleración, junto con su velocidad tangencial, la que causa que siga una trayectoria circular. De aquí que la aceleración centrípeta sea  $g$ , y según la ecuación 28,  $a = v^2/r$ , tenemos que, para  $a = g$  y  $r = R + h$ ,

$$g = \frac{v^2}{R + h}$$

o sea



**Figura 12** La relación geométrica entre  $v$  y  $a$  para varios movimientos.

$$v = \sqrt{(R + h)g} = \sqrt{(6580 \text{ km})(9.2 \text{ m/s}^2)(10^3 \text{ m/km})} = 7780 \text{ m/s} \text{ ó } 17,400 \text{ mi/h.}$$

A esta velocidad, el satélite requiere 1.48 h para completar una órbita.

### 4-5 VECTORES DE VELOCIDAD Y DE ACELERACIÓN EN EL MOVIMIENTO CIRCULAR (Opcional)\*

Como dedujimos en la sección anterior, una partícula que se mueva a velocidad constante a lo largo de un arco de un círculo experimenta una aceleración centrípeta. Aun cuando su velocidad no sea constante, todavía debe de tener una aceleración centrípeta, pero también tendrá una aceleración tangencial que cause un cambio en su velocidad tangencial. Los métodos vectoriales son útiles para relacionar las velocidades y las aceleraciones y para determinar la dirección de la aceleración resultante.

Comenzaremos por rederivar la ecuación 28 para la aceleración centrípeta a velocidad constante usando técnicas vectoriales más generales. La figura 13 muestra una partícula en movimiento circular uniforme con respecto al origen  $O$  de un marco de referencia. Para este movimiento las coordenadas polares planas  $r$  y  $\phi$  son más útiles que las coordenadas rectangulares  $x$  y  $y$  porque  $r$  permanece constante a través del movimiento y  $\phi$  aumenta de una manera lineal simple con el tiempo; el comportamiento de  $x$  y  $y$  durante tal movimiento es más complejo. Los dos sistemas de coordenadas se relacionan por

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ y } \phi = \tan^{-1}(y/x) \quad (29)$$

o por las relaciones recíprocas

$$x = r \cos \phi \text{ y } y = r \sin \phi. \quad (30)$$

En los sistemas de coordenadas rectangulares usamos los vectores unitarios  $i$  y  $j$  para describir al movimiento en el plano  $xy$ . Aquí encontramos más conveniente introducir dos nuevos

vectores unitarios  $u_r$  y  $u_\phi$ . Éstos, como  $i$  y  $j$ , tienen longitud unitaria y carecen de dimensiones; designan a la dirección solamente.

El vector unitario  $u_r$  en cualquier punto está en la dirección de  $r$  creciente en ese punto. Está dirigido radial hacia fuera del origen. El vector unitario  $u_\phi$  en cualquier punto está en la dirección  $\phi$  creciente en ese punto. Es siempre tangente a un círculo con el punto como centro en dirección antihoraria. Como muestra, la figura 13a,  $u_r$  y  $u_\phi$  forman ángulos rectos entre sí. Los vectores unitarios  $u_r$  y  $u_\phi$  difieren de los vectores  $i$  y  $j$  en que las direcciones de  $u_r$  y  $u_\phi$  varían de punto a punto en el plano; los vectores unitarios  $u_r$  y  $u_\phi$  no son, entonces, vectores constantes. Por tanto, cuando tomemos derivadas de expresiones que impliquen a vectores unitarios,  $i$  y  $j$  pueden ser tratados como constantes, pero  $u_r$  y  $u_\phi$  no pueden serlo.

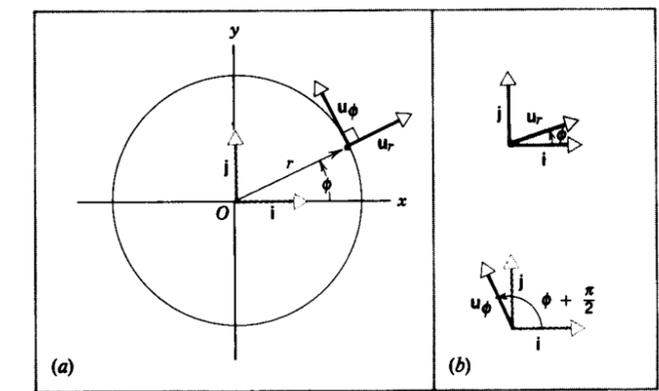
En términos de los vectores unitarios  $i$  y  $j$ , podemos escribir los vectores unitarios  $u_r$  y  $u_\phi$  (véase la Fig. 13b) así:

$$u_r = i \cos \phi + j \sin \phi, \quad (31)$$

$$u_\phi = i \cos(\phi + \pi/2) + j \sin(\phi + \pi/2) = -i \sin \phi + j \cos \phi. \quad (32)$$

Al escribir términos tales como  $i \cos \phi$ , estamos multiplicando un vector por un escalar, y el orden de la multiplicación no es importante. Podríamos igual expresar este término como  $(\cos \phi)i$ .

Si la partícula se mueve en un círculo a una velocidad constante, no tiene una componente radial de la velocidad, y el vector de velocidad está en la dirección de  $u_\phi$ . Más aún, la



**Figura 13** (a) Una partícula que se mueve en sentido antihorario en un círculo de radio  $r$ . (b) Los vectores unitarios  $u_r$  y  $u_\phi$  y su relación con  $i$  y con  $j$ .

\* El material de esta sección puede omitirse o dejarse para más adelante, cuando estudiemos el movimiento de rotación en el capítulo 11.

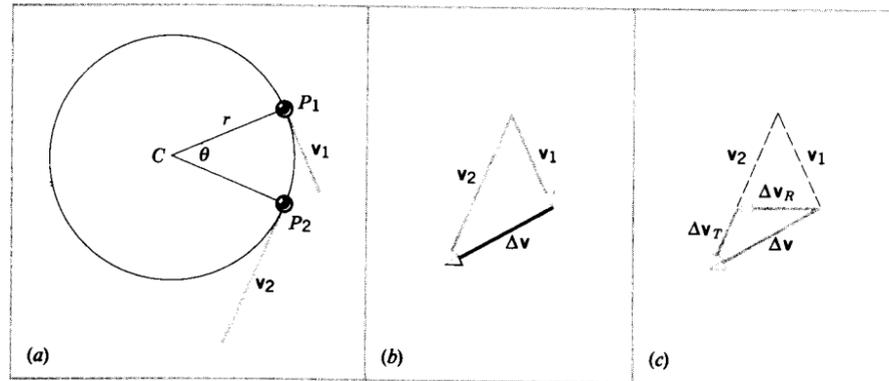


Figura 14 (a) En el movimiento circular no uniforme la velocidad es variable. (b) El cambio de la velocidad  $\Delta v$  al ir de  $P_1$  a  $P_2$ . (c) Existen dos partes para  $\Delta v$ :  $\Delta v_R$ , causada por el cambio en la dirección de  $v$ , y  $\Delta v_T$ , causada por el cambio en la magnitud de  $v$ . En el límite  $\Delta t \rightarrow 0$ ,  $\Delta v_R$  apunta hacia el centro  $C$  del círculo y  $\Delta v_T$  es tangente a la trayectoria circular.

magnitud de la velocidad es precisamente la velocidad constante  $v$ , y, por lo tanto, podemos escribir que

$$\mathbf{v} = v\mathbf{u}_\phi. \quad (33)$$

Esto es,  $\mathbf{v}$  es tangente al círculo y de magnitud constante pero de dirección cambiante.

La aceleración se deduce ahora directa:

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v\mathbf{u}_\phi) = v \frac{d\mathbf{u}_\phi}{dt}. \quad (34)$$

Nótese que la velocidad constante  $v$  pasa por la diferenciación. Para hallar la derivada del vector unitario  $\mathbf{u}_\phi$ , usamos la ecuación 32:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{u}_\phi}{dt} &= -i \frac{d(\sin\phi)}{dt} + j \frac{d(\cos\phi)}{dt} \\ &= -i \cos\phi \frac{d\phi}{dt} - j \sin\phi \frac{d\phi}{dt} \\ &= (-i \cos\phi - j \sin\phi) \frac{d\phi}{dt} \\ &= -\mathbf{u}_r \frac{d\phi}{dt}. \end{aligned} \quad (35)$$

Nótese que en la última etapa hemos usado la ecuación 31. Así,

$$\mathbf{a} = -\mathbf{u}_r v \frac{d\phi}{dt}. \quad (36)$$

La partícula se mueve uniforme alrededor del círculo, y así  $d\phi/dt$  es precisamente la distancia angular cubierta en una revolución ( $2\pi$  radianes) dividida por el tiempo de una revolución (la distancia  $2\pi r$  dividida por la velocidad  $v$ ):

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{2\pi}{2\pi r/v} = \frac{v}{r}. \quad (37)$$

Por último, sustituyendo la ecuación 37 en la ecuación 36, obtenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= -\mathbf{u}_r v \frac{v}{r} \\ &= -\mathbf{u}_r \frac{v^2}{r}. \end{aligned} \quad (38)$$

Esta ecuación nos dice que la aceleración tiene la magnitud constante de  $v^2/r$ , como obtuvimos en la ecuación 28, y que apunta radialmente hacia adentro (esto es, opuesta a  $\mathbf{u}_r$ ). Como la partícula viaja alrededor del círculo, las direcciones de  $\mathbf{u}_r$  y de  $\mathbf{a}$  cambian con relación a los ejes de coordenadas  $xy$  porque la dirección radial cambia.

### Aceleración tangencial en el movimiento circular

Consideraremos ahora el caso más general del movimiento circular en el que la velocidad  $v$  de la partícula en movimiento *no es* constante. De nuevo usaremos métodos vectoriales en coordenadas polares planas.

Como antes, la velocidad está dada por la ecuación 33, o sea

$$\mathbf{v} = v\mathbf{u}_\phi$$

excepto que, en este caso no solamente  $\mathbf{u}_\phi$ , sino también la magnitud  $v$  varía con el tiempo. Recordando la fórmula para la derivada de un producto, obtenemos para la aceleración:

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d(v\mathbf{u}_\phi)}{dt} = v \frac{d\mathbf{u}_\phi}{dt} + \mathbf{u}_\phi \frac{dv}{dt}. \quad (39)$$

La ecuación 34 no incluyó al segundo término del lado derecho de la ecuación 39 porque se supuso que  $v$  era constante. El primer término del lado derecho de la ecuación 39 se reduce, como hemos derivado arriba, a  $-\mathbf{u}_r(v^2/r)$ . Podemos ahora escribir la ecuación 39 así:

$$\mathbf{a} = -\mathbf{u}_r a_R + \mathbf{u}_\phi a_T, \quad (40)$$

en la cual  $a_R = v^2/r$  y  $a_T = dv/dt$ . El primer término,  $-\mathbf{u}_r a_R$ , es la componente vectorial de  $\mathbf{a}$  dirigida radialmente hacia el centro del círculo y surge como consecuencia de un cambio en la dirección de la velocidad en movimiento circular (véase la Fig. 14). El vector  $\mathbf{a}_R$  y su magnitud  $a_R$  se llaman ambos *aceleración centrípeta*. El segundo término,  $\mathbf{u}_\phi a_T$ , es la componente vectorial de  $\mathbf{a}$  que es tangente a la trayectoria de la partícula y proviene de un cambio en la magnitud de la velocidad en movimiento circular (véase la Fig. 14). Al vector  $\mathbf{a}_T$  y a su magnitud  $a_T$  se les llama (a ambos) *aceleración tangencial*.

La magnitud de la aceleración instantánea es

$$a = \sqrt{a_T^2 + a_R^2}. \quad (41)$$

Si la velocidad es constante, entonces  $a_T = dv/dt = 0$  y la ecuación 40 se reduce a la ecuación 38. Cuando la velocidad  $v$  no es constante,  $a_T$  no es cero y  $a_R$  varía de punto a punto. La velocidad  $v$  puede estar cambiando de tal manera que  $a_T$  no sea constante, y entonces tanto  $a_T$  como  $a_R$  pueden variar de punto a punto.

La figura 15 muestra el rastro dejado en una cámara de burbujas de hidrógeno líquido por un electrón energético que forma una espiral hacia adentro. El electrón disminuye su paso a través del líquido de la cámara de modo que su velocidad  $v$  disminuye continuamente. Así, existe en cada punto una acele-

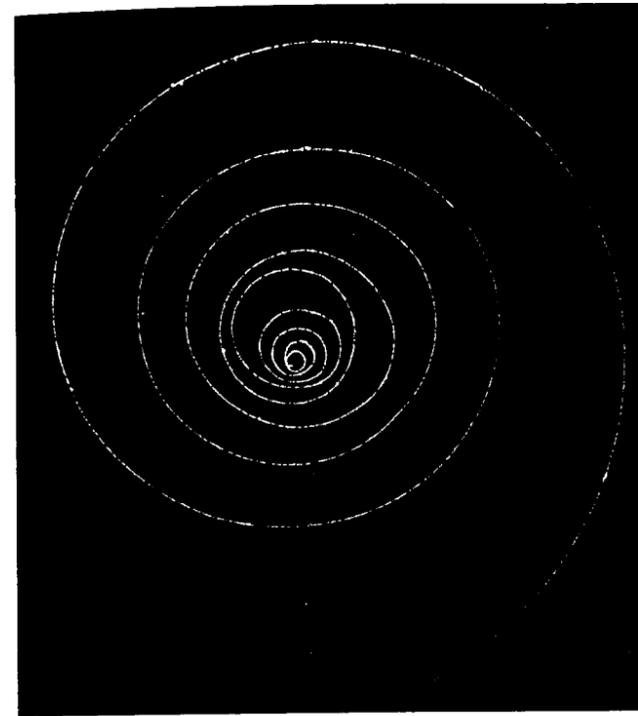


Figura 15 Rastro dejado en una cámara de burbujas de hidrógeno líquido por un electrón. Existe una aceleración radial, causada por un campo magnético, que tiende a producir una trayectoria circular, pero a causa de que el electrón también va aminorando el paso a causa de las colisiones con los átomos de hidrógeno, experimenta también una aceleración tangencial. La trayectoria resultante es una espiral.

ración tangencial  $a_T$  dada por  $dv/dt$ . Aun cuando el electrón no está viajando en una trayectoria circular, pequeños arcos de la espiral se parecen mucho a los arcos de un círculo con un radio  $r$  dado. La aceleración centrípeta  $a$  en cualquier punto está entonces dada por  $v^2/r$ , donde  $r$  es el radio de la trayectoria en el punto en cuestión; tanto  $v$  como  $r$  resultan más pequeñas al perder energía la partícula. La aceleración radial del electrón se produce por un campo magnético presente en la cámara de burbujas y forma ángulos rectos con el plano de la figura 15 (véase el capítulo 34). ■

## 4-6 MOVIMIENTO RELATIVO

Supongamos que usted va en un automóvil que corre en una carretera recta a una velocidad constante de 55 mi/h. Los demás pasajeros que van con usted se mueven a la misma velocidad; aun cuando ésta, con relación al terreno, es de 55 mi/h, su velocidad con relación a usted es cero. En el automóvil usted podría llevar a cabo una serie normal de experimentos de física que no se verían afectados por el movimiento uniforme del automóvil. Por ejemplo, podría lanzar directa hacia arriba una pelota (en su

marco de referencia), y observaría que cae directa hacia abajo. La pelota tiene un movimiento horizontal (a causa del movimiento del automóvil), pero usted tiene el mismo movimiento horizontal y no existe un movimiento horizontal *relativo*.

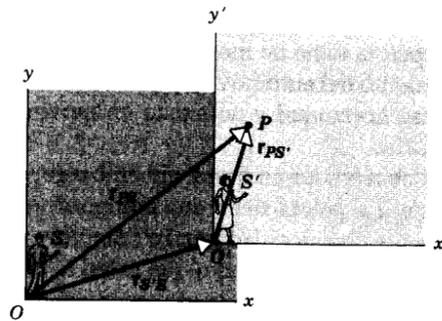
Para un observador en tierra, sin embargo, el resultado es diferente. La pelota tiene una componente horizontal hacia el frente de velocidad igual a 55 mi/h y una componente vertical del movimiento que usted le dio. Sabemos que un proyectil dentro de la gravedad con tales componentes de la velocidad sigue una trayectoria parabólica. Usted y el observador en tierra usarían por lo tanto ecuaciones diferentes para describir el movimiento, pero usted estaría en concordancia con las leyes físicas seguidas por la pelota; por ejemplo, los dos deducirían el mismo valor de la aceleración en caída libre.

Si después otro automóvil corre a su lado y lo rebasa a una velocidad constante de 57 mi/h, usted observaría que este automóvil (en relación con su propio marco de referencia) se mueve lenta hacia adelante de usted a razón de 2 mi/h (= 57 mi/h - 55 mi/h). Dejemos de lado los accidentes externos, es decir, el escenario que recorren, el aire quieto contra el que tropieza el automóvil en movimiento, y consideremos únicamente a los dos automóviles. Usted no tendría manera de decidir cuál de ellos se está moviendo "realmente". Por ejemplo, el automóvil que le rebasa pudiera estar en reposo y usted pudiera estar moviéndose hacia atrás a razón de 2 mi/h; el resultado observado sería el mismo.

En esta sección consideraremos la descripción del movimiento de una sola partícula por dos observadores que estén en movimiento uniforme entre sí. Los dos observadores pudieran ser, por ejemplo, una persona que viaja en un automóvil a velocidad constante a lo largo de una recta larga de una carretera y otra persona que está parada en el terreno. La partícula que ambos están observando pudiera ser una bola arrojada en el aire o en otro automóvil en movimiento.

Llamaremos a estos dos observadores  $S$  y  $S'$ . Cada uno tiene un marco de referencia correspondiente que está unido a un sistema de coordenadas cartesianas. Por conveniencia, suponemos que los observadores están ubicados en los orígenes de sus respectivos sistemas de coordenadas. Hacemos sólo una restricción en esta situación: *la velocidad relativa entre  $S$  y  $S'$  debe ser una constante*. Nos referimos aquí a constante en magnitud y en dirección. Nótese que esta restricción no incluye al movimiento de la partícula que está siendo observada por  $S$  y por  $S'$ . La partícula no tiene necesariamente que estar moviéndose a velocidad constante, y además la partícula bien pudiera estar acelerando.

La figura 16 muestra, en un tiempo particular  $t$ , los dos sistemas de coordenadas que pertenecen a  $S$  y a  $S'$ . Con el fin de simplificar, consideraremos al movimiento en dos



**Figura 16** Los observadores  $S$  y  $S'$ , que se están moviendo uno con respecto al otro, observan a la misma partícula  $P$  en movimiento. En el tiempo mostrado, ellos miden la posición de la partícula con respecto a los orígenes de sus sistemas de coordenadas, cuyas medidas son  $r_{PS}$  y  $r_{PS'}$ , respectivamente. En ese mismo instante, el observador  $S$  mide la posición de  $S'$  con respecto al origen  $O$ , la cual es  $r_{S'S}$ .

dimensiones solamente, los planos comunes  $xy$  y  $x'y'$  que se muestran en la figura 16. El origen del sistema  $S'$  está ubicado con respecto al origen del sistema  $S$  por el vector  $r_{S'S}$ . Nótese en particular el orden de los subíndices que usamos para marcar al vector: el primer subíndice indica el sistema que está siendo ubicado (en este caso, el sistema de coordenadas de  $S'$ ) y el segundo subíndice indica el sistema con respecto al cual hacemos la ubicación (en este caso, el sistema de coordenadas de  $S$ ). El vector  $r_{S'S}$  se leería entonces como "la posición de  $S'$  con respecto a  $S$ ."

La figura 16 muestra también a una partícula  $P$  en los planos comunes  $xy$  y  $x'y'$ . Tanto  $S$  como  $S'$  ubican a la partícula  $P$  con respecto a sus sistemas de coordenadas. De acuerdo con  $S$ , la partícula  $P$  está en la posición indicada por el vector  $r_{PS}$ , mientras que de acuerdo con  $S'$  la partícula  $P$  está en  $r_{PS'}$ . De la figura 16 podemos deducir la siguiente relación entre los tres vectores:

$$r_{PS} = r_{S'S} + r_{PS'} = r_{PS'} + r_{S'S}, \quad (42)$$

donde hemos empleado la ley conmutativa de la suma de vectores para intercambiar el orden de los dos vectores. De nuevo, es preciso prestar mucha atención al orden de los subíndices. En palabras, la ecuación 42 nos dice: "la posición de  $P$  medida por  $S$  es igual a la posición de  $P$  medida por  $S'$  más la posición de  $S'$  medida por  $S$ ."

Supongamos que la partícula  $P$  se mueve con velocidad  $v_{PS'}$  de acuerdo con  $S'$ . ¿Qué velocidad de la partícula mediría  $S$ ? Para responder a esta pregunta, sólo necesitamos tomar la derivada con respecto al tiempo de la ecuación 42, lo cual da

$$\frac{dr_{PS}}{dt} = \frac{dr_{PS'}}{dt} + \frac{dr_{S'S}}{dt}.$$

La razón de cambio de la posición de cada vector da la velocidad correspondiente, de modo que

$$v_{PS} = v_{PS'} + v_{S'S}. \quad (43)$$

Entonces, en cualquier instante, la velocidad de  $P$  según es medida por  $S$  es igual a la velocidad de  $P$  medida por  $S'$  más la velocidad relativa de  $S'$  con respecto a  $S$ . Aunque hemos ilustrado las ecuaciones 42 y 43 para el movimiento en dos dimensiones, su aplicación corresponde igualmente bien en tres dimensiones.

La ecuación 43 es una ley de la *transformación de velocidades*. Nos permite transformar una medición de velocidad hecha por un observador en un marco de referencia, digamos  $S'$ , en otro marco de referencia, digamos  $S$ , siempre y cuando conozcamos la velocidad relativa entre los dos marcos de referencia. Es una ley basada firmemente tanto en el sentido común de la experiencia cotidiana como en los conceptos de espacio y tiempo que son esenciales en la física clásica de Galileo y de Newton. De hecho, la ecuación 43 se llama a menudo la *forma galileana de la ley de la transformación de velocidades*.

Consideraremos aquí sólo el caso especial muy importante en que los dos marcos de referencia se están moviendo a velocidad constante uno con respecto al otro. Esto es,  $v_{S'S}$  es constante tanto en magnitud como en dirección. Las velocidades  $v_{PS}$  y  $v_{PS'}$ , que  $S$  y  $S'$  miden para la partícula  $P$  pudieran no ser constantes y, por supuesto, no serían, en lo general, iguales una a la otra. Sin embargo, si uno de los observadores, digamos  $S'$ , mide una velocidad que sea constante en el tiempo, entonces ambos términos del lado derecho de la ecuación 43 son independientes del tiempo y, por lo tanto, el lado izquierdo de la ecuación 43 debe también ser independiente del tiempo. Entonces, si un observador concluye que la partícula se mueve a velocidad constante, entonces los demás observadores concluyen lo mismo, siempre y cuando ellos estén en marcos de referencia que se muevan a velocidad constante con respecto al marco del primer observador.

Un resultado aun más significativo se obtiene al diferenciar la ecuación 43:

$$\frac{dv_{PS}}{dt} = \frac{dv_{PS'}}{dt} + \frac{dv_{S'S}}{dt}. \quad (44)$$

El último término de la ecuación 44 se anula, porque suponemos que la velocidad relativa de los dos marcos de referencia es una constante. Entonces

$$\frac{dv_{PS}}{dt} = \frac{dv_{PS'}}{dt}.$$

Reemplazando estas dos derivadas de la velocidad con las aceleraciones correspondientes, obtenemos

$$a_{PS} = a_{PS'}. \quad (45)$$

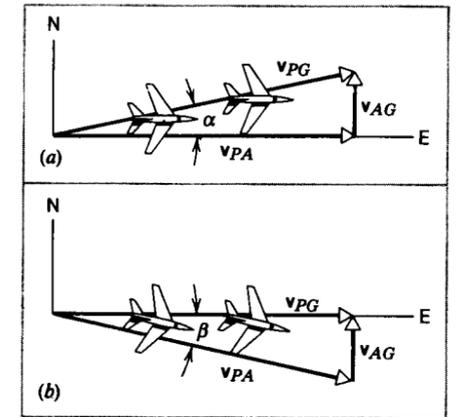
Las aceleraciones de  $P$  medidas por los dos observadores, ¡son idénticas!

En el siguiente capítulo hallaremos que la aceleración es fundamental en el comportamiento dinámico de un objeto según la segunda ley de Newton  $F = ma$ , la cual relaciona a la fuerza  $F$ , a la masa  $m$ , y a la aceleración  $a$ . La ecuación 45 fue derivada en la circunstancia especial de que los marcos de referencia  $S$  y  $S'$  se mueven a una velocidad relativa que es constante tanto en magnitud como en dirección. Tales marcos, que pueden moverse uno con relación al otro pero en los cuales todos los observadores hallan el mismo valor para la aceleración de una partícula dada en movimiento, se llaman *marcos de referencia inerciales*. En el siguiente capítulo veremos que son especialmente importantes porque las leyes del movimiento de Newton se cumplen sólo en tales marcos.

He aquí un ejemplo de una ley de física que puede ser usada para probar los marcos de referencia inerciales. Ate una masa a un extremo de una cuerda y mantenga el otro extremo de la cuerda de modo que la masa cuelgue libremente. La atracción de la gravedad de la Tierra sobre la masa tira de ella hacia el centro de la Tierra; la dirección de la cuerda puede usarse para definir un eje vertical. Ensaye ahora el experimento en su automóvil cuando se mueve en línea recta a una velocidad constante de 55 mi/h. El resultado es el mismo: la cuerda cuelga en la misma dirección vertical. El automóvil, como el terreno, es un marco de referencia inercial. Si usted ensaya de nuevo el experimento cuando el automóvil esté acelerando, frenando, o tomando una curva, la cuerda se desvía de la vertical. Estos marcos acelerados (aun con aceleración centrípeta) son marcos no inerciales.

En realidad, la Tierra es un marco de referencia inercial sólo aproximadamente. A causa de la rotación de la Tierra sobre su eje, dos observadores en diferentes latitudes tienen una velocidad tangencial relativa que cambia su dirección con la rotación. Éste es un efecto pequeño y es despreciable en la mayoría de las circunstancias, aunque debe tomarse en cuenta en los trabajos de precisión y puede tener incalculables consecuencias en circunstancia a gran escala. Por ejemplo, la naturaleza no inercial del marco de referencia de la superficie de la Tierra causa la rotación de los vientos con respecto a un centro de alta o de baja presión que puede producir tormentas severas y destructivas. En la sección 6-8 estudiaremos otras consecuencias de hacer observaciones en marcos de referencia no inerciales.

**Problema muestra 7** (a) La brújula de un aeroplano indica que va directo al este; el indicador de la velocidad del aire marca 215 km/h. Un viento continuo de 65 km/h está soplando directo al norte. (a) ¿Cuál es la velocidad del aeroplano con respecto a tierra? (b) Si el piloto desea volar directo al este, ¿hacia dónde debe enfilar? Esto es, ¿qué deberá leerse en la brújula?



**Figura 17** Problema muestra 7. (a) Un aeroplano, que vuela hacia el este, es empujado por el viento hacia el norte. (b) Para viajar hacia el este, el aeroplano debe volar hacia el viento.

**Solución** (a) En este problema la "partícula" en movimiento es el aeroplano  $P$ . Existen dos marcos de referencia, el suelo ( $G$ ) y el aire ( $A$ ). Hagamos que el suelo sea nuestro sistema  $S$  y que el aire sea el sistema  $S'$ , y por un simple cambio de notación, podemos reescribir la ecuación 43 así:

$$v_{PG} = v_{PA} + v_{AG}.$$

La figura 17a muestra estos vectores, los cuales forman un triángulo rectángulo. Los términos son, en secuencia, la velocidad del aeroplano con respecto al suelo, la velocidad del aeroplano con respecto al aire, y la velocidad del aire con respecto al suelo (esto es, la velocidad del viento). Nótese la orientación del aeroplano, que es congruente con la lectura directo al este en la brújula.

La magnitud de la velocidad del suelo se halla de

$$v_{PG} = \sqrt{v_{PA}^2 + v_{AG}^2} = \sqrt{(215 \text{ km/h})^2 + (65 \text{ km/h})^2} = 225 \text{ km/h}.$$

El ángulo en la figura 17a se deduce de

$$\alpha = \tan^{-1} \frac{v_{AG}}{v_{PA}} = \tan^{-1} \frac{65 \text{ km/h}}{215 \text{ km/h}} = 16.8^\circ.$$

Entonces, con respecto al suelo, el aeroplano está volando a 225 km/h en una dirección  $16.8^\circ$  NE. Nótese que la velocidad respecto al suelo es mayor que la velocidad respecto al aire.

(b) En este caso el piloto debe volar hacia el viento de modo que la velocidad del aeroplano con respecto a tierra apunte hacia el este. El viento permanece sin cambio y el diagrama vectorial que representa a la ecuación 43 es el que se muestra en la figura 17b. Nótese que los tres vectores todavía forman un triángulo rectángulo, como lo hicieron en la figura 17a, pero en este caso la hipotenusa es  $v_{PA}$  en lugar de  $v_{PG}$ .

La velocidad del piloto respecto al suelo es ahora

$$v_{PG} = \sqrt{v_{PA}^2 - v_{AG}^2} = \sqrt{(215 \text{ km/h})^2 - (65 \text{ km/h})^2} = 205 \text{ km/h}.$$

Como lo indica la orientación del aeroplano en la figura 17b, el piloto debe volar hacia el viento según un ángulo  $\beta$  dado por

$$\beta = \sin^{-1} \frac{v_{AG}}{v_{PA}} = \sin^{-1} \frac{65 \text{ km/h}}{215 \text{ km/h}} = 17.6^\circ.$$

Nótese que, volando hacia el viento como el piloto lo ha hecho, la velocidad respecto al terreno es ahora menor que la velocidad respecto al aire.

### Movimiento relativo a alta velocidad (Opcional)

Los argumentos anteriores acerca del movimiento relativo forman la piedra angular de la mecánica newtoniana, que comenzaremos a estudiar en el capítulo 5. No imponen una restricción en la velocidad relativa de los marcos de referencia (mientras sea constante) o en la velocidad del objeto que está siendo observado. Dos siglos después de Newton, Albert Einstein trató de imaginar el resultado de aplicar la ecuación 43 a un rayo de luz que viaja a una velocidad de  $c = 299,792,458$  m/s en el vacío. Supongamos que el observador  $S'$  está viendo un rayo de luz que viaja a razón de  $c$  en la dirección  $x'$  positiva. Hagamos que  $S'$  se mueva con relación a  $S$ , de nuevo en la dirección  $x'$  positiva, a una velocidad  $v_{S'S} = 1$  m/s. ¿Qué velocidad observaría  $S$  para el rayo de luz? La mecánica newtoniana respondería de acuerdo con la ecuación 43:  $v_{PS} = 299,792,458$  m/s + 1 m/s = 299,792,459 m/s.

Einstein estudió a fondo sus libros de texto de física. Sabía lo que la mecánica newtoniana tenía que decir acerca de los observadores en movimiento relativo, mirando a los rayos de luz. También sabía que un rayo de luz no es un objeto ordinario en movimiento. Un rayo de luz viaja de una manera especial. La luz es una radiación electromagnética y puede ser analizada en términos de los campos magnético y eléctrico que la constituyen. Un campo eléctrico en movimiento crea un campo magnético, y un campo magnético en movimiento crea a su vez un campo eléctrico. Así, los campos eléctrico y magnético de la luz en movimiento esencialmente se autogeneran conforme el rayo viaja. Si la ecuación 43 fuera válida para los rayos de luz, razonó Einstein, el observador  $S$  podría emitir un rayo de luz en dirección  $x$  con velocidad  $c$ , y el observador  $S'$  podría viajar en dirección  $x$  relativa a  $S$  a razón de  $v_{S'S} = c$  y atrapar al rayo de luz. Precisamente, como en el caso de un automóvil que viajaba a su lado a la misma velocidad que el automóvil que viajaba al observador  $S'$  le parecería que el rayo de luz está en reposo. Para Einstein esto fue una terrible contradicción: ¿cómo podía un rayo de luz, el cual está constituido fundamentalmente de campos electromagnéticos en movimiento, ser alguna vez observado "en reposo"?

## PREGUNTAS

1. ¿Puede la aceleración de un cuerpo cambiar su dirección sin haber un cambio de dirección en la velocidad?
2. Sean  $v$  y  $a$  representantes de la velocidad y de la aceleración, respectivamente, de un automóvil. Describa las circunstancias en que (a)  $v$  y  $a$  son paralelos; (b)  $v$  y  $a$  son antiparalelos; (c)  $v$  y  $a$  son perpendiculares entre sí; (d)  $v$  es cero pero  $a$  no lo es; (a)  $a$  es cero pero  $v$  no lo es.
3. En salto de anchura, llamado a veces salto largo, ¿tiene importancia qué tan alto se salte? ¿Qué factores determinan el trecho del salto?

Einstein propuso lo que para él era una solución obvia a este dilema: ningún rayo de luz puede jamás ser observado "en reposo". Por lo tanto, se debe deducir absolutamente que la ecuación 43 es errónea cuando se aplica a velocidades cercanas a  $c$ . Einstein llegó todavía un paso más adelante: afirmó que tanto  $S$  como  $S'$  deben medir precisamente el mismo valor que el de la velocidad de la luz, ¡sin importar cuáles sean sus velocidades relativas! Esta aseveración parece contraria al sentido común y a las predicciones de la ecuación 43; si dos observadores se están moviendo a una velocidad relativa de  $0.9999999c$ , ¿cómo pueden ambos medir la misma velocidad de  $c$  para un rayo de luz emitido por uno de ellos?

Dejaremos hasta el capítulo 21 la descripción matemática completa de cómo sucede esto; por ahora, daremos una pista breve en el caso especial de que todas las velocidades sean en la dirección  $x$  (ó  $x'$ ). He aquí ahora el resultado de Einstein para la transformación de las velocidades:

$$v_{PS} = \frac{v_{PS'} + v_{S'S}}{1 + v_{PS'}v_{S'S}/c^2} \quad (46)$$

Nótese la belleza de este resultado. Cuando  $v_{PS'}$  y  $v_{S'S}$  son pequeñas (comparadas con  $c$ ), el denominador de la ecuación 46 es muy cercano a 1 y la ecuación 46 se reduce a la ecuación 43. Con una velocidad baja, la transformación galileana de la velocidad arroja resultados aceptables. Cuando  $v_{PS'} = c$  ( $S'$  está observando un rayo de luz) entonces la ecuación 46 da  $v_{PS} = c$  no importa cuál sea el valor de  $v_{S'S}$ . Todos los observadores miden el mismo valor en la velocidad de un rayo de luz, no importa cuáles sean sus velocidades relativas.

La aseveración de Einstein, y la cinemática y la mecánica que se deducen de ella, no requieren que abandonemos la física newtoniana. En su lugar, nos advierte que restrinjamos nuestros cálculos newtonianos a velocidades muy pequeñas en comparación con  $c$ . Para los objetos en movimiento que normalmente encontramos, vamos bien sin esta restricción. Aun un cohete de alta velocidad ( $v = 10^4$  m/s), uno de los artefactos más rápidos construidos por el ser humano, tiene una velocidad que es mucho menor que  $c$  ( $3 \times 10^8$  m/s), de modo que podemos usar con seguridad la fórmula galileana sin un error significativo. Las partículas tales como los electrones o los protones pueden, sin embargo, ser aceleradas a velocidades que están muy cerca de  $c$ . A estas altas velocidades, debe usarse una nueva clase de física, con nuevas ecuaciones de cinemática y de dinámica. Esta nueva física es la base de la teoría especial de la relatividad, que estudiaremos más a fondo en el capítulo 21. ■

4. ¿Por qué el electrón de un haz de un cañón de electrones cae a causa de la gravedad tanto como una molécula de agua en el chorro de una manguera? Supóngase un movimiento inicial horizontal en cada caso.
5. ¿En qué punto o puntos de su trayectoria tiene un proyectil su mínima velocidad? ¿Y su máxima?
6. La figura 18 muestra la trayectoria seguida por un Learjet de la NASA en una carrera diseñada para simular las condiciones de baja gravedad durante un corto periodo de tiempo. Dé un argumento que demuestre que, si el aero-

plano sigue una trayectoria parabólica particular, los pasajeros experimentarán la sensación de ingravidez.

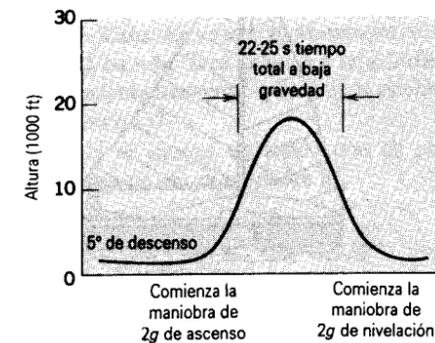


Figura 18 Pregunta 6

7. Un obús es disparado desde el nivel del terreno. El ángulo de disparo que producirá el alcance más largo es menor de  $45^\circ$ ; esto es, una trayectoria más plana tiene un alcance más largo. Explique por qué.
8. Consideremos un proyectil en la cima de su trayectoria. (a) ¿Cuál es su velocidad en términos de  $v_0$  y  $\phi_0$ ? (b) ¿Cuál es su aceleración? (c) ¿Cómo se relaciona la dirección de su aceleración con la de su velocidad?
9. En la figura 19 se muestran las trayectorias de tres balones pateados. Escoja la trayectoria para la cual (a) el tiempo de vuelo es el menor, (b) la componente vertical de la velocidad al patearlo es la más grande, (c) la componente horizontal de la velocidad al patearlo es la más grande, y (d) la velocidad de despegue es la menor. Desprecie la resistencia del aire.

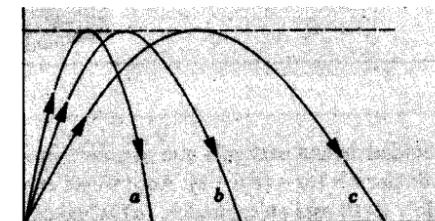


Figura 19 Pregunta 9.

10. Un rifle es apuntado estando su cañón horizontal. Demuestre que, para el mismo alcance, el disparo será demasiado alto cuando se dispare ya sea cuesta arriba o cuesta abajo. (Véase "A Puzzle in Elementary Ballistics", por Ole Anton Haugland, *The Physics Teacher*, abril de 1983, p.246).
11. En su libro *Sport Science*, Peter Brancazio, refiriéndose a proyectiles tales como pelotas de béisbol y de golf, escribe: "En igualdad de condiciones, un proyectil viajará más lejos en un día caluroso que en un día frío, más lejos en una altitud elevada que al nivel del mar, más lejos en aire

húmedo que en aire seco". ¿Cómo puede usted explicar estas afirmaciones?

12. Una gráfica de altura contra tiempo de un objeto lanzado vertical hacia arriba es una parábola. La trayectoria de un proyectil, lanzado hacia arriba pero no verticalmente hacia arriba, es también una parábola. ¿Es esto una coincidencia? Justifique su respuesta.
13. Las piezas de artillería de largo alcance no se colocan en el ángulo de "alcance máximo" de  $45^\circ$ , sino en ángulos de elevación más grandes, en el intervalo de  $55^\circ$  a  $65^\circ$ . ¿Qué hay de malo con los  $45^\circ$ ?
14. En el movimiento de proyectiles en que la resistencia del aire sea despreciable, ¿es alguna vez necesario considerar el movimiento tridimensional en lugar del bidimensional?
15. ¿Es posible acelerar cuando se está viajando a velocidad constante? ¿Es posible rodear una curva con aceleración cero? ¿Y con aceleración constante?
16. Describa cualitativamente la aceleración que actúa sobre un abalorio que, deslizándose a lo largo de un alambre sin fricción, se mueve hacia adentro a velocidad constante a lo largo de una espiral.
17. Demuestre que, tomando en cuenta la rotación y la revolución de la Tierra, un libro que está sobre la mesa se mueve más rápido durante la noche que durante el día. ¿En qué marco de referencia es verdad esta aseveración?
18. Un aviador, al salir después de descender en picada, sigue el arco de un círculo y se dice que "se salió a  $3g$ " al salir del clavado. Explique lo que significa esto.
19. Podría estar representada la aceleración de un proyectil en términos de una componente radial y una componente tangencial en cada punto del movimiento? De ser así, ¿existe alguna ventaja con esta representación?
20. Una tubería de forma rectangular con esquinas redondeadas se coloca en un plano vertical, como se muestra en la figura 20. Se introducen dos bolas de acero en la esquina superior derecha. Una viaja por el conducto  $AB$  y la otra por el conducto  $CD$ . ¿Cuál llegará más pronto a la esquina inferior izquierda?
21. Si la aceleración de un cuerpo es constante en un marco de referencia dado, ¿es necesaria constante en cualquier otro marco de referencia?
22. Un muchacho que está sentado en un carro de ferrocarril que se mueve a velocidad constante arroja una pelota al aire directa hacia arriba. ¿Caerá la pelota detrás de él? ¿Enfrente de él? ¿En sus manos? ¿Qué sucede si el carro acelera hacia adelante o pasa por una curva cuando la pelota está en el aire?
23. Una mujer que está en la plataforma trasera de un tren que se mueve a velocidad constante deja caer una moneda mientras se inclina sobre el barandal. Describir la trayectoria de la moneda según la ve (a) la mujer que va en el tren, (b) una persona que está parada sobre el suelo cerca de la vía, y (c) una persona que viaja en un segundo tren que se mueve en la dirección opuesta al primer tren por una vía paralela.
24. Un elevador está descendiendo a velocidad constante. Un pasajero deja caer una moneda al suelo. ¿Qué ace-

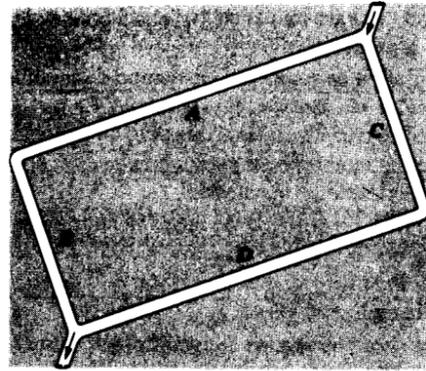


Figura 20 Preguntar 20.

- leración observarían en la moneda (a) el pasajero y (b) una persona en reposo con respecto al pozo o base del elevador.
- Se está recogiendo agua en una cubeta a partir de una salida estable de una llave. ¿Cambiará la razón a la que se está llenando la cubeta si comienza a soplar un viento horizontal estable?
  - Un autobús tiene un parabrisas vertical y viaja bajo la lluvia a una velocidad  $v_b$ . Las gotas de lluvia caen verticalmente con una velocidad terminal  $v_r$ . ¿Con qué ángulo golpean las gotas de lluvia al parabrisas?
  - Durante una lluvia estable las gotas están cayendo verticalmente. Con objeto de ir bajo la lluvia de un lugar a otro de manera tal que se tope con el menor número de gotas

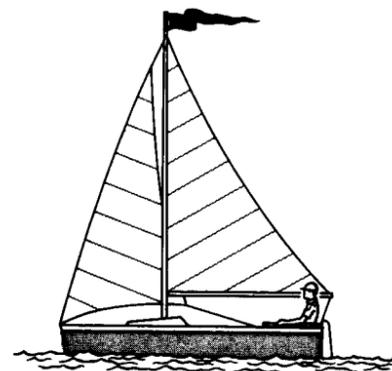


Figura 21 Preguntar 28.

- de lluvia, ¿se movería usted a la mayor velocidad posible, a la menor velocidad posible, o a una velocidad intermedia? (Véase "An Optimal Speed for Traversing a Constant Rain", por S. A. Stern, *American Journal of Physics*, Septiembre de 1983, pág. 815).
- ¿Cuál es el error de la figura 21? El bote está navegando con el viento.
  - La transformación galileana de la velocidad, ecuación 43, es tan instintivamente conocida en la experiencia cotidiana que a veces se asegura que "es obviamente correcta, no requiere ser demostrada". Muchas refutaciones de la teoría de la relatividad así llamadas se han basado en esta afirmación. ¿Cómo podría usted refutar a alguien que hiciera tal afirmación?

las placas, y (c) las componentes horizontal y vertical de la velocidad del rayo cuando emerge de las placas.

- Un velero sobre hielo se desliza sobre la superficie de un lago congelado con una aceleración constante producida por el viento. En cierto momento su velocidad es  $6.30\mathbf{i} - 8.42\mathbf{j}$  en m/s. Tres segundos más tarde el velero se detiene instantáneamente. ¿Cuál es la aceleración durante este intervalo?
- Una partícula se mueve de modo que su posición en función del tiempo es, en unidades SI,

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{i} + 4t^2\mathbf{j} + t\mathbf{k}.$$

Escriba las expresiones para (a) su velocidad y (b) su aceleración, ambas en función del tiempo. (c) ¿Cuál es la forma de la trayectoria de la partícula?

- Una partícula sale del origen en  $t = 0$  a una velocidad inicial  $\mathbf{v}_0 = 3.6\mathbf{i}$ , en m/s. Experimenta una aceleración constante  $\mathbf{a} = -1.2\mathbf{i} - 1.4\mathbf{j}$ , en  $\text{m/s}^2$ . (a) ¿En qué tiempo llega la partícula a su coordenada  $x$  máxima? (b) ¿Cuál es la velocidad de la partícula en ese momento? (c) ¿Dónde está la partícula en ese momento?
- Una partícula A se mueve a lo largo de la línea  $y = d$  (30 m) con una velocidad constante  $\mathbf{v}$  ( $v = 3.0$  m/s) dirigida paralelamente al eje  $x'$  positivo (Fig. 22). Una segunda partícula B comienza en el origen con velocidad cero y aceleración constante  $\mathbf{a}$  ( $a = 0.40$   $\text{m/s}^2$ ) en el mismo instante en que la partícula A pasa el eje  $y$ . ¿Qué ángulo  $\theta$  entre  $\mathbf{a}$  y el eje  $y$  positivo resultaría en una colisión entre estas dos partículas?

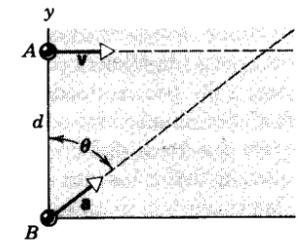


Figura 22 Problema 9.

- Una pelota se deja caer desde una altura de 39.0 m. El viento está soplando horizontalmente e imparte una aceleración constante de  $1.20$   $\text{m/s}^2$  a la pelota. (a) Demuestre que la trayectoria de la pelota es una línea recta y halle los valores de  $R$  y de  $\theta$  en la figura 23. (b) ¿Qué tanto tiempo le toma a la pelota llegar al suelo? (c) ¿A qué velocidad golpea la pelota al suelo?

Sección 4-3 Movimiento de proyectiles

- Una pelota rueda fuera del borde de una mesa horizontal de 4.23 ft de altura. Golpea al suelo en un punto 5.11 ft horizontalmente lejos del borde de la mesa. (a) ¿Durante cuánto tiempo estuvo la pelota en el aire? (b) ¿Cuál era su velocidad en el instante en que dejó la mesa?

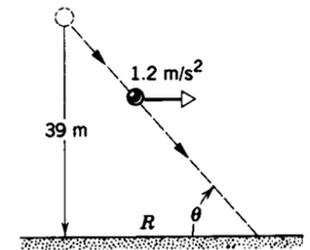


Figura 23 Problema 10.

- Los electrones, como todas las formas de materia, caen bajo la influencia de la gravedad. Si un electrón es proyectado horizontalmente a una velocidad de  $3.0 \times 10^7$  m/s (un décimo de la velocidad de la luz), ¿qué tan lejos caerá al atravesar 1 m de distancia horizontal?
- Un dardo es arrojado horizontalmente hacia el centro del blanco, punto P del tablero, con una velocidad inicial de 10 m/s. Se clava en el punto Q del aro exterior, verticalmente abajo de P, 0.19 s más tarde; véase la figura 24. (a) ¿Cuál es la distancia PQ? (b) ¿A qué distancia del tablero estaba parado el jugador?

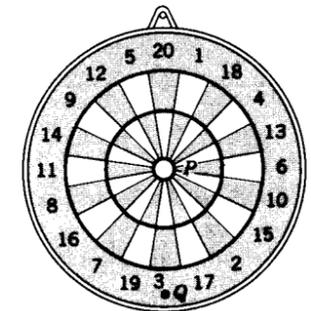


Figura 24 Problema 13.

- Un rifle se apunta horizontalmente hacia un blanco alejado 130 m. La bala golpea el blanco 0.75 in abajo del punto de mira. (a) ¿Cuál es el tiempo de trayecto de la bala? (b) ¿Cuál es la velocidad de la bala en la boca del arma?
- Un proyectil se dispara horizontalmente desde un cañón ubicado a 45.0 m sobre un plano horizontal con una velocidad en la boca del cañón de 250 m/s. (a) ¿Cuánto tiempo permanece el proyectil en el aire? (b) ¿A qué distancia horizontal golpea el suelo? (c) ¿Cuál es la magnitud de la componente vertical de su velocidad al golpear el suelo?
- Una bola de béisbol deja la mano del lanzador horizontalmente a una velocidad de 92 mi/h. La distancia al bateador es de 60.0 ft. (a) ¿Cuánto tiempo le toma a la bola viajar los primeros 30.0 ft horizontalmente? ¿Los segundos 30 ft? (b) ¿A qué distancia cae la bola bajo la acción de la gravedad durante los primeros 30.0 ft de su viaje horizontal? (c) ¿Durante los segundos 30.0 ft? (d) ¿Por qué no son

PROBLEMAS

Sección 4-1 Posición, velocidad, y aceleración

- Un aeroplano vuela 410 mi al este desde la ciudad A hasta la ciudad B en 45 min y luego 820 mi al sur desde la ciudad B hasta la ciudad C en 1 h 30 min. (a) ¿Cuáles son la magnitud y la dirección del vector de desplazamiento que representa a la totalidad del viaje? ¿Cuáles son (b) el vector de la velocidad promedio y (c) la velocidad promedio del viaje?
- La posición de una partícula que se mueve en un plano  $xy$  está dada por  $\mathbf{r} = (2t^3 - 5t)\mathbf{i} + (6 - 7t^2)\mathbf{j}$ . Aquí  $\mathbf{r}$  está en metros y  $t$  está en segundos. Calcule (a)  $\mathbf{r}$ , (b)  $\mathbf{v}$ , y (c)  $\mathbf{a}$  cuando  $t = 2$  s.
- En 3 h 24 min, un globo va a la deriva 8.7 km N, 9.7 km E, y 2.9 km en elevación desde el punto de salida sobre el suelo. Halle (a) la magnitud de su velocidad promedio y (b) el ángulo que su velocidad promedio forma con la horizontal.

- La velocidad de una partícula que se mueve en el plano  $xy$  está dada por  $\mathbf{v} = (6t - 4t^2)\mathbf{i} + 8\mathbf{j}$ . Aquí  $\mathbf{v}$  está en metros por segundo y  $t$  ( $t > 0$ ) está en segundos. (a) ¿Cuál es la aceleración cuando  $t = 3$  s? (b) ¿Cuándo, si alguna vez, es la aceleración cero? (c) ¿Cuándo (si sucede) es cero la velocidad? (d) ¿Cuándo (si sucede) es la rapidez igual a 10 m/s?

Sección 4-2 Movimiento con aceleración constante

- En un tubo de rayos catódicos se proyecta un haz de electrones horizontalmente a una velocidad de  $9.6 \times 10^8$  cm/s a una región entre un par de placas horizontales de 2.3 cm de longitud. Un campo eléctrico entre las placas causa una aceleración constante de los electrones hacia abajo con magnitud de  $9.4 \times 10^{16}$   $\text{cm/s}^2$ . Halle (a) el tiempo requerido para que los electrones pasen a través de las placas, (b) el desplazamiento vertical del haz al pasar por

iguales estas cantidades? Desprecie los efectos de la resistencia del aire.

17. En una historia de detectives, un cuerpo es hallado a 15 ft afuera de la base de un edificio y abajo de una ventana situada a 80 ft de altura. ¿Cree usted que la muerte fue accidental o que no? ¿Por qué?
18. Usted arroja una pelota desde un acantilado a una velocidad inicial de 15 m/s y con un ángulo de 20° abajo de la horizontal. Halle (a) su desplazamiento horizontal, y (b) su desplazamiento vertical 2.3 s más tarde.
19. Usted arroja una pelota a una velocidad de 25.3 m/s y un ángulo de 42.0° arriba de la horizontal directa hacia una pared como se muestra en la figura 25. La pared está a 21.8 m del punto de salida de la pelota. (a) ¿Cuánto tiempo estuvo la pelota en el aire antes de que golpee a la pared? (b) ¿A qué distancia arriba del punto de salida golpea la pelota a la pared? (c) ¿Cuáles son las componentes horizontal y vertical de su velocidad cuando golpea a la pared? (d) ¿Ha pasado el punto más elevado de su trayectoria cuando la golpea?

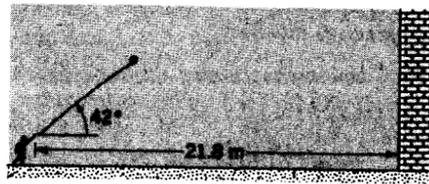


Figura 25 Problema 19.

20. Demuestre que la altura máxima alcanzada por un proyectil es  $y_{\text{máx}} = (v_0 \sin \phi_0)^2 / 2g$ .
21. (a) Pruebe que para un proyectil disparado desde la superficie a nivel del terreno con un ángulo  $\phi_0$  arriba de la horizontal, la razón de la altura máxima  $H$  y el alcance  $R$  está dada por  $H/R = \frac{1}{2} \tan \phi_0$ . (b) Halle el ángulo de proyección para el cual la altura máxima y el alcance horizontal son iguales. Véase la figura 26.

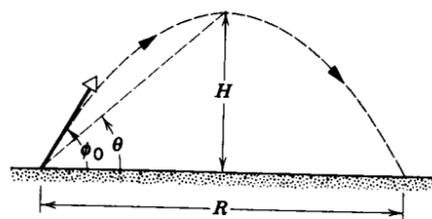


Figura 26 Problemas 21 y 22.

22. Un proyectil se dispara desde la superficie de un suelo nivelado con un ángulo  $\phi_0$  sobre la horizontal. (a) Demuestre que el ángulo de elevación  $\theta$  del punto más elevado tal como se le ve desde el punto de disparo se relaciona con  $\phi_0$  según  $\tan \theta = \frac{1}{2} \tan \phi_0$ . Véase la figura 26. (b) Calcule  $\theta$  para  $\phi_0 = 45^\circ$ .

23. Una piedra es proyectada a una velocidad inicial de 120 ft/s en una dirección 62° sobre la horizontal, hacia un acantilado de altura  $h$ , como se muestra en la figura 27. La piedra golpea al terreno en A 5.5 s después del lanzamiento. Halle (a) la altura  $h$  del acantilado, (b) la velocidad de la piedra en el momento antes de que se impacte en A, y (c) la altura máxima  $H$  alcanzada sobre el suelo.

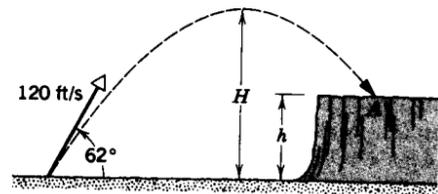


Figura 27 Problema 23.

24. En ocasión de las Olimpiadas de 1968 en la ciudad de México, Bob Beamon rompió el record de salto largo con un salto de 8.90 m. Suponga que su velocidad inicial en el punto de separación del suelo era 9.50 m/s, casi igual a la de un corredor veloz. ¿Qué tan cerca estuvo este atleta de primera clase de llegar al alcance máximo posible en ausencia de una resistencia del aire? El valor de  $g$  en la ciudad de México es de 9.78 m/s<sup>2</sup>.
25. En el problema muestra 3, halle (a) la velocidad del paquete cuando golpea al blanco y (b) el ángulo del impacto con la vertical. (c) ¿Por qué el ángulo del impacto no es igual al ángulo de mira?
26. En el libro de Galileo *Dos ciencias nuevas* el sabio afirma que "para elevaciones [ángulos de proyección] que excedan o no lleguen a 45° por cantidades iguales, los alcances son iguales". (a) Pruebe esta aseveración (véase la Fig. 28). (b) Para una velocidad inicial de 30.0 m/s y un alcance de 20.0 m, halle los dos ángulos posibles de elevación de la proyección.

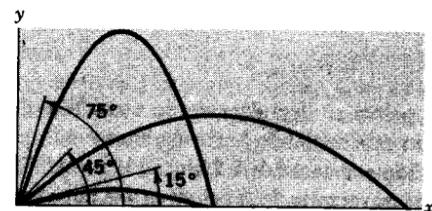


Figura 28 Problema 26.

27. Un malabarista maneja cinco bolas en movimiento, lanzando cada una secuencialmente hacia arriba a una distancia de 3.0 m. (a) Determine el intervalo de tiempo entre dos lanzamientos sucesivos. (b) De las posiciones de las otras bolas en el instante en que una llega a su mano. (Desprecie el tiempo tomado para transferir la bola de una mano a la otra.)

28. Un rifle dispara una bala a una velocidad en la boca de 1500 ft/s a un blanco situado a 150 ft. ¿A qué altura del blanco debe ser apuntado el rifle para que la bala dé en el blanco?
29. Una pelota rueda desde lo alto de una escalera con una velocidad horizontal de magnitud 5.0 ft/s. Los escalones tienen 8.0 in de altura y 8.0 in de ancho. ¿En qué escalón golpeará primero la pelota?
30. Una pelota se arroja desde el terreno hacia el aire. A una altura de 9.1 m se observa que la velocidad es  $v = 7.6i + 6.1j$ , en m/s (eje  $x$  horizontal, eje  $y$  vertical y hacia arriba). (a) ¿A qué altura máxima se elevará la pelota? (b) ¿Cuál será la distancia horizontal recorrida por la pelota? (c) ¿Cuál es la velocidad de la pelota (magnitud y dirección) en el instante anterior de que golpee el suelo?
31. Si el montículo del lanzador está a 1.25 ft sobre el campo de béisbol, ¿puede un lanzador lanzar una bola rápida horizontalmente a 92.0 mi/h y aun así entrar en la zona de "strike" sobre la base que está a 60.5 ft de distancia? Suponga que, para obtener un strike, la bola debe entrar a una altura de 1.30 ft pero no mayor de 3.60 ft.
32. De acuerdo con la ecuación 24, el alcance de un proyectil no depende solamente de  $v_0$  y de  $\phi_0$  sino también del valor  $g$  de la aceleración de gravitación, la cual varía de lugar a lugar. En 1936, Jesse Owens estableció un récord mundial de salto largo de 8.09 m en los Juegos Olímpicos de Berlín ( $g = 9.8128 \text{ m/s}^2$ ). Suponiendo los mismos valores de  $v_0$  y de  $\phi_0$ , ¿en cuánto habría diferido su récord de haber competido en Melbourne ( $g = 9.7999 \text{ m/s}^2$ ) en 1956? (Relacionado con esto véase "The Earth's Gravity", por Weikko A. Heiskanen, *Scientific American*, Septiembre de 1955, pág. 164.)
33. Durante las erupciones volcánicas pueden ser proyectados por el volcán gruesos trozos de roca; estos proyectiles se llaman *bloques volcánicos*. La figura 29 muestra una sección transversal del Monte Fuji, en Japón. (a) ¿A qué velocidad inicial tendría que ser arrojado de la boca A del volcán uno de estos bloques, formando 35° con la horizontal, con objeto de caer en el pie B del volcán? (b) ¿Cuál es el tiempo de recorrido en el espacio?

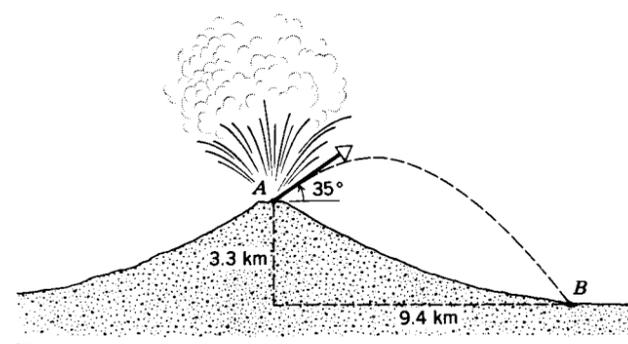


Figura 29 Problema 33.

34. Un jugador de tercera base quiere lanzar a la primera base, que dista 127 ft. Su mejor velocidad de tiro es de 85 mi/h.

- (a) Si la bola deja su mano a 3.0 ft sobre el suelo en una dirección horizontal, ¿qué sucederá? (b) ¿Con qué ángulo de elevación deberá el jugador de tercera base lanzar la bola si se desea que el jugador en primera base la atrape? Suponga que el guante del jugador en primera base está también a 3.0 ft sobre el terreno. (c) ¿Cuál será el tiempo del recorrido?
35. ¿A qué velocidad inicial deberá el jugador de baloncesto lanzar la pelota, formando 55° con la horizontal, para encestar el tiro de castigo, como se muestra en la figura 30? El aro de la cesta tiene un diámetro de 18 in. Obtenga otros datos de la figura 30.

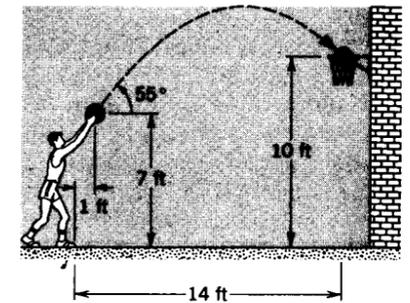


Figura 30 Problema 35.

36. Un jugador de fútbol patea la pelota para que tenga un "tiempo de suspensión" (tiempo de recorrido) de 4.50 s y aterrice a 50 yardas (= 45.7 m) de distancia. Si la pelota abandona el pie del jugador a 5.0 ft (= 1.52 m) de altura sobre el terreno, ¿cuál es su velocidad inicial (magnitud y dirección)?
37. Cierto aeroplano tiene una velocidad de 180 mi/h y baja en picada con un ángulo de 27° abajo de la horizontal cuando emite una señal de radar. La distancia horizontal entre el punto de emisión de la señal y el punto en que la señal golpea el suelo es de 2300 ft. (a) ¿Cuánto tiempo estará la señal en el aire? (b) ¿A qué altura estaba el aeroplano cuando se emitió la señal de radar? Véase la figura 31.

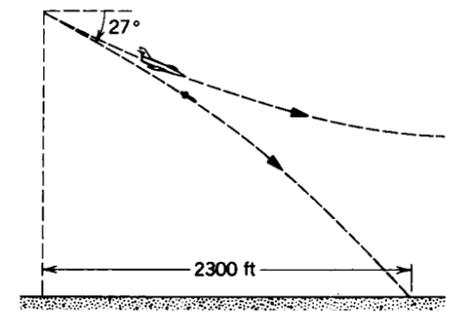


Figura 31 Problema 37.

38. Un bombardero en picada, clavándose con un ángulo de 56.0° con la vertical, suelta una bomba a una altitud de

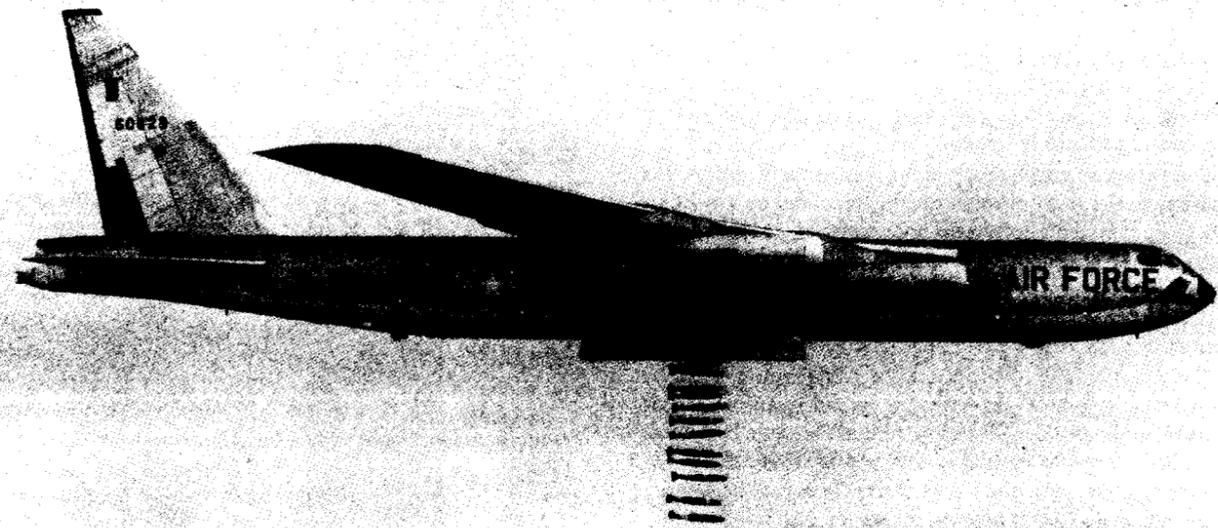


Figura 32 Problema 39.

730 m. La bomba llega al suelo 5.10 s más tarde, fallando el blanco. (a) ¿Cuál es la velocidad del bombardero? (b) ¿A qué distancia viaja la bomba horizontalmente durante su recorrido? (c) ¿Cuáles eran las componentes horizontal y vertical de su velocidad en el momento antes de que toque el suelo? (d) ¿Con qué velocidad y ángulo con la vertical cayó la bomba al suelo?

39. El B-52 que se muestra en la figura 32 tiene una longitud de 49 m y está viajando a una velocidad de 820 km/h (= 510 mi) sobre un objetivo. ¿Qué tan apartados entre sí estarán los cráteres que formen las bombas? Haga usted las mediciones que necesite directamente de la figura. Suponga que no hay viento y desprecie la resistencia del aire. ¿Cómo afectaría la resistencia del aire a su respuesta?
40. Una pelota de fútbol es pateada con una velocidad inicial de 64 ft/s y un ángulo de proyección de  $42^\circ$  sobre la horizontal. Un receptor en la línea de gol situada a 65 yardas en la dirección de la patada comienza a correr para atrapar a la pelota en ese instante. ¿Cuál debe ser su velocidad promedio si tiene que atrapar la pelota en el momento antes de que llegue al suelo? Desprecie la resistencia del aire.
41. (a) Durante una partida de tenis, un jugador sirve a 23.6 m/s (según registra una pistola de radar), dejando la pelota a la raqueta a 2.37 m sobre la superficie de la cancha, horizontalmente. ¿Por cuánto deberá la pelota salvar la red, que está a 12 m de distancia y tiene 0.90 m de altura? (b) Supóngase que el jugador sirve la pelota como antes excepto que la pelota deja la raqueta a  $5.0^\circ$  abajo de la horizontal. ¿Pasará esta vez la pelota sobre la red sin tocarla?
42. Un bateador golpea una bola lanzada a una altura de 4.0 ft sobre el suelo de modo que su ángulo de proyección es de  $45^\circ$  y el alcance horizontal es de 350 ft. La bola viaja hacia

la línea izquierda del campo donde hay una barda de 24 ft de altura que se ubica a 320 ft de la placa de "home". ¿Pasará la bola por encima de la barda? De hacerlo, ¿por cuánto?

43. El pateador de un equipo de fútbol americano puede dar a la pelota una velocidad inicial de 25 m/s. ¿Dentro de qué zona angular deberá ser pateada la pelota si el pateador debe apenas anotar un gol de campo desde un punto situado a 50 m enfrente de los postes de gol cuya barra horizontal está a 3.44 m sobre el terreno?
44. Un cañón está listo para disparar proyectiles con una velocidad inicial  $v_0$  directamente sobre la ladera de una colina con un ángulo de elevación  $\alpha$ , como se muestra en la figura 33. ¿A qué ángulo a partir de la horizontal deberá ser apuntado el cañón para obtener el alcance máximo posible  $R$  sobre la ladera de la colina?

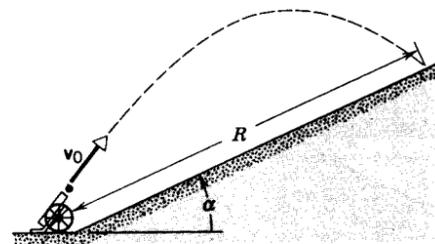


Figura 33 Problema 44.

45. En un juego de béisbol un bateador envía la bola a una altura de 4.60 ft sobre el suelo de modo que su ángulo de proyección es de  $52.0^\circ$  con la horizontal. La bola aterriza

en el graderío, a 39.0 ft arriba de la parte inferior; véase la figura 34. El graderío tiene una pendiente de  $28.0^\circ$  y los asientos inferiores están a una distancia de 358 ft de la placa de "home". Calcule la velocidad con que la bola dejó el bate. (Desprecie la resistencia del aire.)

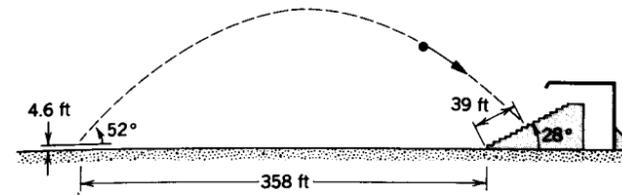


Figura 34 Problema 45.

46. Se lanzan proyectiles a una distancia horizontal  $R$  del borde de un acantilado de altura  $h$  de manera tal que aterrizan a una distancia horizontal  $x$  del fondo del acantilado. Si queremos que  $x$  sea tan pequeña como es posible, ¿cómo ajustaríamos  $\phi_0$  y  $v_0$ , suponiendo que  $v_0$  pueda ser variada desde cero hasta un valor máximo finito  $v_{\max}$  y que  $\phi_0$  puede ser variado continuamente? Sólo se permite una colisión con el suelo; véase la figura 35.

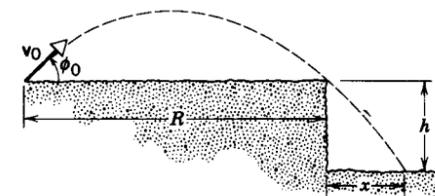


Figura 35 Problema 46.

47. Una observadora de radar en tierra está "vigilando" la aproximación de un proyectil. En cierto instante tiene la siguiente información: el proyectil está a su máxima altitud y se mueve horizontalmente con velocidad  $v$ ; la distancia en línea recta al proyectil es  $L$ ; la línea de mira al proyectil está en un ángulo  $\theta$  sobre la horizontal. (a) Halle la distancia  $D$  entre la observadora y el punto de impacto del proyectil.  $D$  tiene que ser expresado en términos de las cantidades observadas  $v, L, \theta$ , y el valor de  $g$  conocido. Suponga una Tierra plana; suponga también que la observadora está en el plano de la trayectoria del proyectil. (b) ¿Cómo puede decirse si el proyectil pasará sobre la cabeza de la observadora o chocará contra el suelo antes de alcanzarla?
48. Un cohete se dispara desde el reposo y se mueve en línea recta a  $70.0^\circ$  sobre la horizontal con una aceleración de  $46.0 \text{ m/s}^2$ . Después de 30.0 s de vuelo impulsado, los motores se apagan y el cohete sigue una trayectoria parabólica hasta caer de nuevo en tierra (véase la figura 36). (a) Halle el tiempo de vuelo desde el disparo hasta el impacto. (b) ¿Cuál será la altitud máxima alcanzada? (c) ¿Cuál es la distancia desde la rampa de lanzamiento hasta

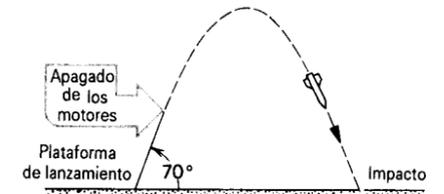


Figura 36 Problema 48.

el punto del impacto? (Desprecie la variación de  $g$  con la altitud.)

49. Un cañón antitanques está ubicado en el borde de una meseta a una altura de 60.0 m sobre la llanura que la rodea (véase la Fig. 37). La cuadrilla del cañón avista un tanque enemigo estacionado en la llanura a una distancia horizontal de 2.20 km del cañón. En el mismo instante, la tripulación del tanque ve el cañón y comienza a escapar en línea recta de éste con una aceleración de  $0.900 \text{ m/s}^2$ . Si el cañón antitanques dispara un obús con una velocidad de salida de 240 m/s y un ángulo de elevación de  $10.0^\circ$  sobre la horizontal, ¿cuánto tiempo esperarán los operarios del cañón antes de disparar para darle al tanque?

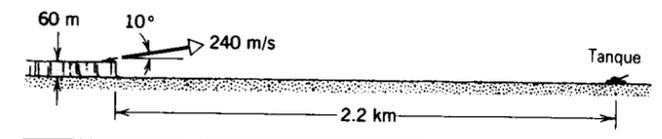


Figura 37 Problema 49.

50. ¿Cuál es la altura vertical máxima a la cual un jugador de béisbol debe lanzar una bola si puede alcanzar una distancia de 60.0 m? Suponga que la bola es lanzada a una altura de 1.60 m a la misma velocidad en ambos casos.

Sección 4-4 Movimiento circular uniforme

51. En el modelo Bohr del átomo de hidrógeno, un electrón gira alrededor de un protón en una órbita circular de  $5.29 \times 10^{-11} \text{ m}$  de radio con una velocidad de  $2.18 \times 10^6 \text{ m/s}$ . ¿Cuál es la aceleración del electrón en este modelo del átomo de hidrógeno?
52. Un astronauta está girando en una centrífuga de 5.2 m de radio. (a) ¿Cuál es su velocidad si la aceleración es de  $6.8 g$ ? (b) ¿Cuántas revoluciones por minuto se requieren para producir esta aceleración?
53. Un satélite de la Tierra se mueve en una órbita circular situada a 640 km sobre la superficie de la Tierra. El tiempo para una revolución es de 98.0 min. (a) ¿Cuál es la velocidad del satélite? (b) ¿Cuál es la aceleración en caída libre en la órbita?
54. Una rueda de feria Ferris tiene un radio de 15 m y completa cinco vueltas sobre su eje horizontal a cada minuto. (a) ¿Cuál es la aceleración, magnitud y dirección, de un pasajero en el punto más alto? (b) ¿Cuál es la aceleración en el punto más bajo?

82 Capítulo 4 Movimiento bidimensional y tridimensional

55. Un abanico que está girando completa 1200 revoluciones cada minuto. Consideremos un punto en la punta de un aspa, la cual tiene un radio de 0.15 m. (a) ¿A qué distancia se mueve el punto en una revolución? (b) ¿Cuál es la velocidad del punto? (c) ¿Cuál es su aceleración?
56. El tren rápido conocido como el TGV Atlantique (Train Grande Vitesse) que corre desde el sur de París hasta Le Mans, en Francia, tiene una rapidez máxima de 310 km/h. (a) Si el tren toma una curva a esta velocidad y la aceleración experimentada por los pasajeros ha de estar limitada a 0.05 g, ¿cuál es el radio de curvatura de la vía más pequeña que puede tolerarse? (b) Si existe una curva con un radio de 0.94 km, ¿A qué valor deberá disminuir su velocidad?
57. Se cree que ciertas estrellas neutrón (estrellas extremadamente densas) giran a alrededor de 1 rev/s. Si una estrella tal tiene un radio de 20 km (valor típico), (a) ¿cuál es la velocidad de un punto situado en el ecuador de la estrella y (b) ¿cuál es la aceleración centrípeta de ese punto?
58. Una partícula P viaja a velocidad constante en un círculo de 3.0 m de radio y completa una revolución en 20 s (Fig. 38). La partícula pasa por el punto O en t = 0. Con respecto al origen O, halle (a) la magnitud y dirección de los vectores que describan su posición 5.0, 7.5, y 10 s más tarde; (b) la magnitud y dirección del desplazamiento en el intervalo de 5.0 s desde el quinto segundo hasta el décimo; (c) el vector de la velocidad promedio en este intervalo; (d) el vector de la velocidad instantánea al comienzo y al final de este intervalo, y (e) el vector de la aceleración instantánea al comienzo y al final de este intervalo. Mida los ángulos en sentido antihorario desde el eje x.

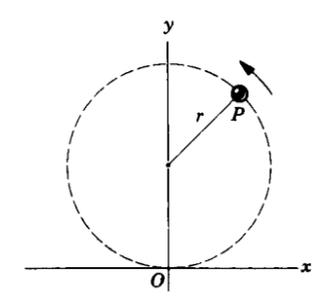


Figura 38 Problema 58.

59. Una partícula en movimiento circular uniforme con respecto al origen O tiene una velocidad v. (a) Demuestre que el tiempo  $\Delta t$  requerido para que pase a través de un desplazamiento angular  $\Delta\theta$  está dado por

$$\Delta t = \frac{2\pi r}{v} \frac{\Delta\theta}{360^\circ}$$

donde  $\Delta\theta$  está en grados y r es el radio del círculo. (b) Refiérase a la Fig. 39 y, tomando las componentes x y y de las velocidades en los puntos 1 y 2, demuestre que  $\bar{a}_x = 0$  y  $\bar{a}_y = -0.99v^2/r$ , para un par de puntos simétricos con respecto al eje y siendo O = 90. (c) Demuestre que si  $\Delta\theta$

= 30°,  $\bar{a}_x = 0$  y  $\bar{a}_y = -0.99v^2/r$ . (d) Demuestre que  $\bar{a}_y \rightarrow -v^2/r$  según  $\Delta\theta \rightarrow 0$  y que la simetría circular requiere esta respuesta para cada punto del círculo.

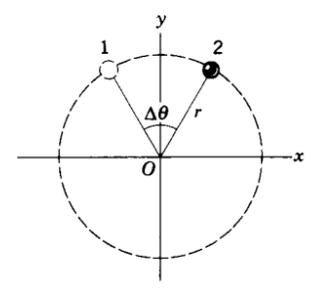


Figura 39 Problema 59

60. Un niño hace girar a una piedra en un círculo horizontal situado a 1.9 m sobre el suelo por medio de una cuerda de 1.4 m de longitud. La cuerda se rompe, y la piedra sale disparada horizontalmente, golpeando el suelo a 11 m de distancia. ¿Cuál fue la aceleración centrípeta de la piedra mientras estaba en movimiento circular?
61. (a) Use los datos del apéndice C para calcular la relación de las aceleraciones centrípetas de la Tierra y de Saturno debidas a sus revoluciones alrededor del Sol. Suponga que ambos planetas se mueven en órbitas circulares a velocidad constante. (b) ¿Cuál es la razón de las distancias de estos dos planetas al Sol? (c) Compare las respuestas de las partes (a) y (b) y sugiera una relación sencilla entre la aceleración centrípeta y la distancia al Sol. Compruebe sus hipótesis calculando las mismas razones para otro par de planetas.
62. (a) ¿Cuál es la aceleración centrípeta de un objeto situado en el ecuador de la Tierra debido a la rotación de la misma? (b) ¿Cuál tendría que ser el periodo de rotación de la Tierra para que los objetos situados en el ecuador tuvieran una aceleración centrípeta igual a 9.8 m/s<sup>2</sup>?
63. Calcule la aceleración de una persona situada en la latitud 40° debida a la rotación de la Tierra.
64. Una mujer de 1.6 metros de talla permanece de pie en la latitud 50° durante 24 h. (a) Durante este intervalo, ¿qué tanto más se mueve en comparación con las plantas de sus pies? (b) ¿Cuánto más grande es la aceleración de su cabeza que la aceleración de las plantas de los pies? Considere solamente los efectos asociados con la rotación de la Tierra.

Sección 4-5 Vectores de velocidad y de aceleración en el movimiento circular

65. Una partícula está viajando en una trayectoria circular de 3.64 m de radio. En cierto instante, la partícula se mueve a razón de 17.4 m/s, y su aceleración forma un ángulo de 22.0° en dirección al centro del círculo según se ve desde la partícula (véase la figura 40). ¿A qué tasa está creciendo la velocidad de la partícula? (b) ¿Cuál es la magnitud de la aceleración?

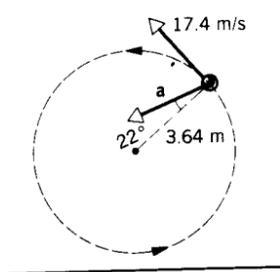


Figura 40 Problema 65.

66. Una partícula se mueve en un plano de acuerdo a

$$x = R \sin \omega t + \omega R t,$$

$$y = R \cos \omega t + R,$$

donde  $\omega$  y R son constantes. Esta curva, llamada cicloide, es la trayectoria trazada por un punto de la llanta de una rueda que gira sin resbalamiento a lo largo del eje x. (a) Trace la trayectoria. (b) Calcule la velocidad y la aceleración instantáneas cuando la partícula está en el valor de y máximo y mínimo.

Sección 4-6 Movimiento relativo

67. Una persona asciende por una escalera mecánica quieta de 15 m de longitud en 90 s. Estando de pie en la misma escalera, ahora en movimiento, la persona es transportada en 60 s. ¿Cuánto tiempo le tomaría a esa persona ascender por la escalera en movimiento? ¿Depende la respuesta de la longitud de la escalera?
68. La terminal del aeropuerto de Ginebra, Suiza, tiene un "pasillo móvil" para hacer más rápido el tránsito de los pasajeros en un corredor largo. Pedro, que camina por el corredor pero no utiliza el pasillo móvil, emplea 150 s para atravesarlo. Pablo, quien simplemente va de pie en el pasillo móvil, cubre la misma distancia en 70 s. María no sólo usa el pasillo móvil sino que camina a lo largo de él. ¿Cuánto tiempo emplea María? Suponga que Pedro y María caminan a la misma velocidad.
69. Un vuelo transcontinental de 2700 mi está programado con un tiempo 50 min más largo cuando vaya hacia el oeste que hacia el este. La velocidad del aeroplano de propulsión a chorro en el aire es de 600 mi/h. ¿Qué hipótesis deberán hacerse sobre la velocidad de la corriente de viento del chorro del aeroplano, ya sea del este o del oeste, al preparar la bitácora?
70. Está nevando verticalmente a una velocidad constante de 7.8 m/s. (a) ¿Con qué ángulo con respecto a la vertical y (b) a qué velocidad parecen estar cayendo los copos de nieve según los ve el conductor de un automóvil que viaja en una carretera recta a una velocidad de 55 km/h?
71. Un tren viaja hacia el sur a razón de 28 m/s (con relación al terreno) bajo una lluvia que se inclina hacia el sur por el soplo del viento. La trayectoria de cada gota de lluvia forma un ángulo de 64° con la vertical, según lo aprecia un observador que se halla quieto en el suelo. Sin embargo, otro observador que viaja en un tren ve las trayectorias de

la lluvia perfectamente verticales a través del vidrio de la ventana. Determine la velocidad de las gotas de lluvia con relación a tierra.

72. En un gran almacén un comprador se halla de pie sobre la escalera mecánica que asciende; la escalera se mueve a un ángulo de 42° sobre la horizontal y a una velocidad de 0.75 m/s. El comprador se cruza con su hija, la cual va de pie en una escalera, idéntica adyacente, que desciende. (Véase la figura 41). Halle la velocidad del comprador respecto a su hija.

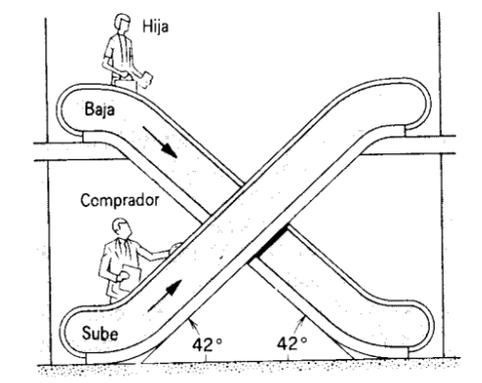


Figura 41 Problema 72.

73. Un piloto debe viajar hacia el este desde A hasta B y luego regresar de nuevo a A hacia el oeste. La velocidad del aeroplano en el aire es v y la velocidad del aire con respecto al suelo es u. La distancia entre A y B es l y la velocidad del aeroplano en el aire es constante. (a) Si u = 0 (aire quieto), demuestre que el tiempo del viaje redondo es  $t_0 = 2l/v$ . (b) Suponga que la velocidad del aire va hacia al este (u oeste). Demuestre que el tiempo del viaje redondo es, entonces,

$$t_E = \frac{t_0}{1 - u^2/v^2}$$

(c) Suponga que la velocidad del aire es hacia el norte (o hacia el sur). Demuestre que el tiempo del viaje redondo es, entonces,

$$t_N = \frac{t_0}{\sqrt{1 - u^2/v^2}}$$

(d) En las partes (b) y (c), ¿debemos suponer que  $u < v$ ? ¿Por qué?

74. Dos carreteras se intersecan, como se ve en la Fig. 42. En el instante mostrado, una patrulla P está a 41 m de la intersección y moviéndose a razón de 76 km/h. El motorista M está a 57 m de la intersección y moviéndose a razón de 62 km/h. En este momento, ¿cuál es la velocidad (magnitud y ángulo con la línea de mira) del motorista con respecto a la patrulla?
75. Un helicóptero está volando en línea recta sobre el nivel del campo a una velocidad constante de 6.2 m/s y una altitud constante de 9.5 m. Un paquete es arrojado

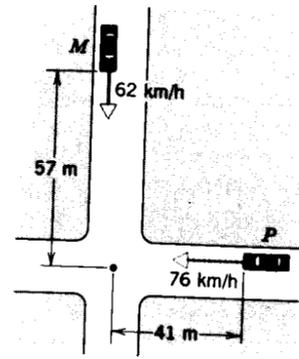


Figura 42 Problema 74.

horizontalmente desde el helicóptero con una velocidad inicial de 12 m/s en relación al helicóptero, y en dirección opuesta al movimiento del helicóptero. (a) Halle la velocidad inicial del paquete con relación al terreno. (b) ¿Cuál es la distancia horizontal entre el helicóptero y el paquete en el instante en que el paquete golpea el terreno? (c) ¿Qué ángulo forma el vector velocidad del paquete con el terreno en el instante anterior al impacto, visto desde el suelo? (d) ¿Y tal como se vería desde el helicóptero?

76. Un elevador asciende con una aceleración de  $4.0 \text{ ft/s}^2$ . En el instante en que su velocidad es de  $8.0 \text{ ft/s}$ , un tornillo suelto cae desde el techo del elevador hasta el piso, que está a  $9.0 \text{ ft}$  de distancia. Calcule (a) el tiempo que le tomó al tornillo viajar desde el techo al piso, y (b) la distancia que ha caído en relación al tiro del elevador.
77. Un avión ligero alcanza una velocidad en el aire de  $480 \text{ km/h}$ . El piloto se dispone a salir hacia un destino situado a  $810 \text{ km}$  al norte, pero descubre que el avión debe enfilarse a  $21^\circ \text{ NE}$  para volar hacia allí directamente. El avión llega en  $1.9 \text{ h}$ . ¿Cuál fue el vector de la velocidad del viento?
78. La Policía estatal de Nueva Hampshire utiliza aviones para controlar los límites de velocidad en la carretera. Supongamos que uno de los aeroplanos tiene una velocidad de  $135 \text{ mi/h}$  en aire quieto. Está volando directo al norte de modo que en todo momento está sobre una carretera norte-sur. Un observador en tierra le dice por radio al piloto que está soplando un viento de  $70 \text{ mi/h}$  pero descuida darle la dirección del viento. El piloto observa que a pesar del viento el aeroplano puede viajar  $135 \text{ mi}$  a lo largo de la carretera en  $1 \text{ h}$ . En otras palabras, la velocidad en el suelo es la misma que si no hubiese viento. (a) ¿Cuál es la dirección del viento? (b) ¿Cuál es la dirección del aeroplano, esto es, el ángulo entre su eje y la carretera?
79. Una mujer puede remar en un bote a razón de  $4.0 \text{ mi/h}$  en aguas tranquilas. (a) Si está cruzando un río donde la corriente es de  $2.0 \text{ mi/h}$ , ¿hacia qué dirección deberá llevar su bote si quiere llegar a un punto directamente opuesto a su punto de arranque? (b) Si el río tiene una anchura de  $4.0 \text{ mi}$ , ¿cuánto tiempo le tomará cruzar el río? (c) ¿Cuánto tiempo le tomará remar  $2.0 \text{ mi}$  río abajo y luego regresar

a su punto de arranque? (d) ¿En qué dirección deberá enfilarse a su bote si desea cruzar en el tiempo más corto posible? ¿Cuál es ese tiempo?

80. Un carro de carga de madera se está moviendo en una vía del ferrocarril a una velocidad  $v_1$ . Un tirador apostado dispara una bala (velocidad inicial  $v_2$ ) hacia él con un rifle de alto poder. La bala traspasa ambas paredes del carro, estando los orificios de entrada y salida exactamente opuestos entre sí según se ven desde adentro del carro. ¿Desde qué dirección, respecto a la vía, se hizo el disparo? Suponga que la bala no se desvía después de entrar al carro, pero que su velocidad disminuye en un 20%. Tome  $v_1 = 85 \text{ km/h}$  y  $v_2 = 650 \text{ m/s}$ . (¿Le sorprende que no necesite conocer la anchura del carro de carga?)
81. Un hombre desea cruzar un río de  $500 \text{ m}$  de anchura. Su velocidad al remar (en relación al agua) es de  $3.0 \text{ km/h}$ . El río fluye a una velocidad de  $2.0 \text{ km/h}$ . La velocidad a la que camina el hombre en la orilla es de  $5.0 \text{ km/h}$ . (a) Halle la trayectoria (remo y caminata combinadas) que tomaría para llegar al punto directamente opuesto a su punto de partida en el tiempo más corto. (b) ¿Cuánto tiempo le tomaría?
82. Un buque de guerra navega directo al este a razón de  $24 \text{ km/h}$ . Un submarino que está a  $4.0 \text{ km}$  de distancia dispara un torpedo que tiene una velocidad de  $50 \text{ km/h}$  (véase la Fig. 43). Si la orientación del buque según se ve desde el submarino es de  $20^\circ \text{ NE}$ , (a) ¿en qué dirección debería ser disparado el torpedo para que alcance al buque, y (b) cuál sería el tiempo de viaje del torpedo hasta alcanzar al buque?

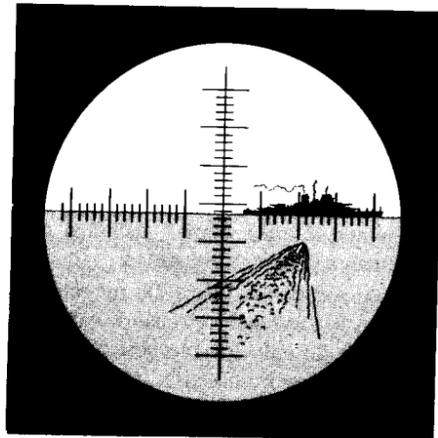


Figura 43 Problema 82.

83. Un electrón se mueve a una velocidad de  $0.42 c$  con respecto al observador B. El observador B se mueve a una velocidad de  $0.63 c$  con respecto al observador A, en la misma dirección que el electrón. ¿Qué velocidad del electrón mide el observador A?
84. La galaxia Alfa se aleja de nosotros a una velocidad de  $0.350 c$ . Por otra parte la galaxia Beta, localizada precisamente en la dirección opuesta, está alejándose de nosotros a la misma velocidad. ¿Qué velocidad de alejamiento

percibiría un observador que estuviera en la galaxia Alfa (a) de nuestra galaxia y (b) de la galaxia Beta?

Proyectos para la computadora

85. Una computadora puede generar una tabla de coordenadas, componentes de la velocidad, y componentes de la aceleración de un objeto en tiempos especificados. La tabla puede ser consultada luego para hallar cantidades interesantes, tales como el punto más elevado de una trayectoria, el tiempo de aterrizaje, etc. Escriba un programa o diseñe una hoja de cálculo para las coordenadas y las componentes de la velocidad de un proyectil al final de cada intervalo de tiempo  $\Delta t$  desde el tiempo  $t_1$  hasta el tiempo  $t_2$ , suponiendo que el proyectil parte desde el origen en el tiempo  $t = 0$ . Esto es, la computadora deberá evaluar  $x = v_0 t \cos \theta_0$ ,  $y = v_0 t \sin \theta_0 - \frac{1}{2} g t^2$ ,  $v_x = v_0 \cos \theta_0$  y  $v_y = v_0 \sin \theta_0 - g t$  para  $t = t_1, t_1 + \Delta t, t_1 + 2 \Delta t, \dots, t_1 + N \Delta t$ . Comience con los valores de  $v_0, \theta_0, t_1, \Delta t$ , y  $N$ . Disponga el programa de modo que puedan ser cambiados fácilmente  $t_1, \Delta t$ , y  $N$  en corridas siguientes sin realimentar con los valores de otras cantidades. Pruebe el programa resolviendo el problema siguiente. Compare los resultados con los obtenidos de las expresiones algebraicas apropiadas.  
Un proyectil es disparado sobre el nivel del suelo con  $v = 50 \text{ m/s}$  a  $25^\circ$  sobre la horizontal. (a) Evaluar  $x(t), y(t), v_x(t)$ , y  $v_y(t)$  al final de cada  $0.1 \text{ s}$  desde  $t = 0$  hasta  $t = 4.5 \text{ s}$ . (b) Halle los dos valores del tiempo entre los cuales estará el proyectil en el punto más elevado de su trayectoria. Corra de nuevo su trayectoria. Corra de nuevo el programa con  $t_1$  igual al primero de estos tiempos y  $\Delta t = 0.005 \text{ s}$ . Use la tabla para calcular las coordenadas del punto más elevado con 2 cifras significativas. (c) Use la misma técnica para hallar el tiempo, las coordenadas y las componentes de la velocidad cuando el proyectil retorna a la altura del disparo.
86. Una partícula se mueve en el plano  $xy$  sujeta a la aceleración  $a_x = -1.7$  y  $a_y = -0.45$ . (En este problema, todas las dimensiones están en centímetros y todos los tiempos en segundos.) En  $t = 0$ , la partícula pasa por el punto  $x = 1$ ,  $y = 10$  moviéndose a velocidad  $v_x = 10$  y  $v_y = 2$ . Escriba un programa para la computadora que tabule las siguientes variables que describen el movimiento de la partícula cuando está en el primer cuadrante (arriba a la derecha) solamente:  $t, x, y, r, \phi (= \tan^{-1} y/x), v_x, v_y, v, \theta (= \tan^{-1} v_y/v_x)$ . Use la tabla de valores para responder a las siguientes

preguntas. De todas las respuestas con 3 cifras significativas. Algunas preguntas pueden tener más de una respuesta. (a) ¿En qué tiempo y en qué lugar deja la partícula al primer cuadrante? (b) ¿Cuál es la distancia máxima de la partícula desde el origen, y cuál es su rapidez en ese tiempo? (c) ¿En qué dirección se está moviendo la partícula cuando su velocidad sea  $2.00$ ? (d) ¿Dónde cruza la partícula a la línea a  $45^\circ$  que bisecta al cuadrante?

87. Las coordenadas de un objeto que viaja uniformemente en un círculo de radio  $R$  están dadas por  $x = R \cos \omega t$  y  $y = R \sin \omega t$ , donde  $\omega$  es una constante y el ángulo  $\omega t$  está en radianes. Escriba un programa para la computadora o diseñe una hoja de cálculo para la velocidad promedio en el intervalo de tiempo desde  $t_0$  hasta  $t_0 + \Delta t$ . Tome  $R = 1.5 \text{ m}$  y  $\omega = 5.0 \text{ rad/s}$  y calcule  $\bar{v}_x = [x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)]/\Delta t$  y  $\bar{v}_y = [y(t_0 + \Delta t) - y(t_0)]/\Delta t$ . Disponga el programa para que fácilmente vuelva a correrse con valores de  $t_0$  y de  $\Delta t$  diferentes. La pérdida de significación se reduce si todas las variables son de precisión doble.

(a) Tome  $t_0 = 1 \text{ s}$ . Calcule  $x, y, \bar{v}_x, \bar{v}_y$ , y  $x\bar{v}_x + y\bar{v}_y$ . La última cantidad es el producto escalar de los vectores de posición y de la velocidad promedio. Es cero si son perpendiculares entre sí. Repita ahora los cálculos con  $\Delta t = 0.1, 0.01, 0.001$ , y  $0.0001 \text{ s}$ . Nótese que las componentes de  $\bar{v}$  tienden a los valores de límite, las componentes de la velocidad instantánea  $v$ , y que  $\bar{v}$  se va volviendo más cercanamente perpendicular al vector de posición (esto es, más cercanamente tangente al círculo). Como puede ser demostrado por diferenciación directa, las componentes de  $v$  están dadas por  $v_x = -\omega R \sin \omega t$  y  $v_y = \omega R \cos \omega t$ . Calcule estas expresiones para ver con qué precisión estimó a  $v$ . (b) Revise ahora el programa para que calcule las componentes de la aceleración promedio:  $\bar{a}_x = [v_x(t_0 + \Delta t) - v_x(t_0)]/\Delta t$  y  $\bar{a}_y = [v_y(t_0 + \Delta t) - v_y(t_0)]/\Delta t$ . Use  $v_x(t) = -\omega R \sin \omega t$  y  $v_y(t) = \omega R \cos \omega t$ . Calcule también  $x\bar{a}_x + y\bar{a}_y$ . Ésta es la magnitud del producto vectorial de los vectores de posición y de la aceleración promedio. Es cero si son paralelos. Lleve a cabo el cálculo para  $t_0 = 1 \text{ s}$  y  $\Delta t = 1, 0.1, 0.01, 0.001$ , y  $0.0001 \text{ s}$ . Nótese que  $\bar{a}$  tiende a un valor límite, la aceleración instantánea  $a$ , y que se vuelve más cercanamente paralela al vector de posición. Las componentes de  $a$  están dadas por  $a_x = -\omega^2 R \cos \omega t$  y  $a_y = -\omega^2 R \sin \omega t$ . Calcule estas expresiones y compare los resultados con las estimaciones generadas por su programa. Verifique también que los resultados generados por su programa predigan que  $a = v^2/R$  para la magnitud de la aceleración.

# CAPÍTULO 5

## FUERZA Y LAS LEYES DE NEWTON

En los capítulos 2 y 4 hemos estudiado el movimiento de una partícula. No nos preguntábamos entonces qué es lo que "causaba" el movimiento; simplemente lo describíamos en función de los vectores  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{v}$ , y  $\mathbf{a}$ . En este capítulo y en el próximo, discutiremos las causas del movimiento, un campo de estudio llamado *dinámica*.

El enfoque de la *dinámica* tal y como nosotros la consideramos en este capítulo y en el próximo, recibe el nombre de *mecánica clásica*, fue desarrollada y exitosamente probada en los siglos XVII y XVIII. En nuestro siglo, nuevas teorías (la *relatividad especial y general*, y la *mecánica cuántica*) han descubierto ciertas áreas alejadas de nuestras experiencias ordinarias en que la *mecánica clásica* no consigue dar predicciones que estén de acuerdo con el experimento, pero estas nuevas teorías reducen a la *mecánica clásica* a los límites de los objetos ordinarios.

Sin tener que recurrir a la *relatividad especial o general* o a la *mecánica cuántica*, podemos construir grandes rascacielos y estudiar las propiedades de los materiales de construcción; construir aeroplanos que puedan transportar a cientos de personas y volar alrededor del mundo; y enviar al espacio sondas en misiones complejas a los cometas, los planetas, y aún más allá. De todo esto trata la *mecánica clásica*.

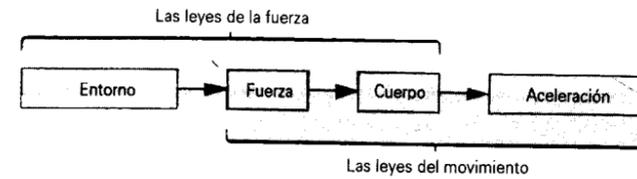
### 5-1 MECÁNICA CLÁSICA

Centraremos nuestra atención en el movimiento de un cuerpo en particular. Éste interactúa con los cuerpos que lo rodean (su *entorno*) de modo que su velocidad cambia: se produce una aceleración. La tabla 1 muestra algunos movimientos acelerados comunes y el entorno responsa-

ble, en su mayoría, de la aceleración. El problema central de la *mecánica clásica* es éste: (1) Se nos da un cuerpo cuyas características (masa, volumen, carga eléctrica, etc.) conocemos. (2) Situamos a este cuerpo, en una posición inicial conocida y con una velocidad inicial también conocida, en un entorno del cual tenemos una descripción completa. (3)Cuál es el movimiento siguiente que tendrá el cuerpo?

TABLA 1 ALGUNOS MOVIMIENTOS ACELERADOS Y SUS CAUSAS

Objeto	Cambio en el movimiento	Causa principal (entorno)
Manzana	Cae del árbol	Gravedad (Tierra)
Bola de billar	Rebota contra otra	Otra bola, la mesa, la gravedad (Tierra)
Esquiador	Se desliza cuesta abajo	La gravedad (Tierra), fricción (la nieve), resistencia del aire
Haz de electrones (aparato de TV)	Enfoque y deflexión	Campos electromagnéticos (imanes y diferencias de voltaje)
Cometa Halley	Viaje redondo a través del sistema solar	Gravedad (del Sol)



**Figura 1** Nuestro programa de mecánica. Las tres casillas de la izquierda sugieren que la fuerza es una interacción entre un cuerpo y su entorno. Las tres casillas de la derecha sugieren que una fuerza que actúe sobre un cuerpo lo acelerará.

En capítulos anteriores, hemos tratado a los objetos físicos como *partículas*, esto es, como cuerpos cuya estructura interna o sus movimientos internos pueden ser dejados de lado y cuyas partes se mueven todas exactamente de la misma manera. Al estudiar la interacción de un cuerpo y su entorno, por lo general debemos considerar objetos grandes cuyas diferentes partes puedan interactuar con el entorno en modos distintos. Por ejemplo, un trabajador empuja un cajón pesado sobre una superficie rugosa. El obrero empuja sobre uno de los lados verticales del cajón, en tanto que su base horizontal experimenta el efecto retardante de la fricción con el piso. La superficie frontal puede incluso experimentar la resistencia del aire.

Más adelante trataremos a fondo la mecánica de los cuerpos extensos. Por ahora continuaremos suponiendo que todas las partes del cuerpo se mueven de la misma manera, de modo que podamos tratar al cuerpo como una partícula. Con esta suposición, no importa en qué parte del cuerpo actúe el entorno; nuestra principal preocupación es el *efecto neto* del entorno.

Este problema de la mecánica clásica fue resuelto, al menos para una gran variedad de entornos, por Isaac Newton (1642-1727) cuando promulgó sus leyes del movimiento y formuló su ley de la gravitación universal. El procedimiento para resolver este problema, en términos de nuestro actual marco de referencia de la mecánica clásica, es como sigue: (1) Introducimos el concepto de *fuerza  $F$*  (la cual consideraremos por ahora como un empujón o un jalón), y la definimos en función de la aceleración  $a$  que experimenta determinado cuerpo estándar. (2) Desarrollamos un procedimiento para asignar una *masa  $m$*  a un cuerpo de modo que podamos entender el hecho de que diferentes cuerpos experimentan diferentes aceleraciones en el mismo entorno. (3) Finalmente, tratamos de hallar maneras de calcular las fuerzas que actúan sobre los cuerpos a partir de las propiedades del cuerpo y de su entorno; esto es, buscamos las *leyes de la fuerza*. La fuerza, que es básicamente un medio de relacionar al entorno con el movimiento del cuerpo, aparece tanto en las leyes del movimiento (que nos dicen qué aceleración experimentará un cuerpo bajo la acción de una fuerza dada) y en las leyes de fuerza (que nos dicen cómo calcular

la fuerza que actúa sobre un cuerpo dado en un entorno determinado). Las leyes del movimiento y las leyes de la fuerza, juntas, constituyen las leyes de la mecánica, como lo sugiere la figura 1.

Este programa de la mecánica no puede ser probado por partes. Debemos verlo como una unidad y juzgarlo como exitoso si podemos decir “sí” a estas dos preguntas: (1) ¿Las predicciones del programa concuerdan con el experimento? (2) ¿Tienen las leyes de la fuerza una forma sencilla? Será el broche de oro de la mecánica newtoniana el hecho de que podamos contestar afirmativamente a cada una de estas preguntas.

## 5-2 PRIMERA LEY DE NEWTON

Durante siglos el problema del movimiento y sus causas fue un tema central de la filosofía natural, un primer apelativo de lo que ahora llamamos física. Sin embargo, el progreso extraordinario se llevó a cabo en los tiempos de Galileo y de Newton. Isaac Newton, nacido en Inglaterra en el año de la muerte de Galileo, es el arquitecto principal de la mecánica clásica. Él logró cristalizar las ideas de Galileo y de otros que le precedieron. Sus tres leyes del movimiento fueron presentadas primero (en 1686) en su *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, obra que suele llamarse también *Principia*.

Antes de Galileo la mayoría de los filósofos pensaban que se necesitaba cierta influencia o “fuerza” para mantener a un cuerpo en movimiento. Ellos pensaban que un cuerpo estaba en su “estado natural” cuando estaba en reposo. Por ejemplo, creían que si un cuerpo se mueve en línea recta a velocidad constante tenía que haber algún agente externo que lo impulsara en forma continua; de lo contrario, de manera “natural” dejaría de moverse.

Si quisiéramos probar estas ideas de manera experimental, tendríamos que hallar primero una forma de liberar a un cuerpo de todas las influencias de su entorno o de todas las fuerzas. Esto es difícil de lograr, pero en ciertos casos podemos hacer que las fuerzas sean muy pequeñas. Si estudiamos el movimiento al hacer más y más pequeñas las fuerzas, tendremos alguna idea de cómo sería el movimiento si las fuerzas externas fuesen realmente cero.

Coloquemos a nuestro cuerpo de prueba, digamos un bloque, sobre un plano horizontal rígido. Si hacemos que el bloque se deslice a lo largo de este plano, notaremos que gradualmente irá más despacio hasta detenerse. De hecho, esta observación se usó para basar la idea de que el movimiento se detenía cuando la fuerza externa, en este caso la mano que inicialmente impulsó al bloque, se retiraba. Sin embargo, podemos argumentar, en contra de esta idea, como sigue. Repitamos nuestro experimento, usando ahora un bloque más liso y un plano más liso

también aplicando un lubricante. Observamos que la velocidad disminuye más lentamente que antes. Usemos bloques y superficies todavía más lisos y mejores lubricantes. Hallaremos que el bloque disminuye su velocidad en una cantidad más y más notable y viaja más lejos cada vez antes de llegar al reposo. Podríamos haber experimentado con una pista de aire, en la cual puedan flotar los objetos sobre una capa delgada de aire; tal dispositivo se acerca al límite de fricción nula, ya que con un ligero golpecito sobre uno de los deslizadores puede ponerlo en movimiento a lo largo de la pista a una velocidad baja y casi constante. Podemos ahora extrapolar y decir que, si pudiese ser eliminada toda fricción, el cuerpo continuaría indefinidamente en línea recta a velocidad constante. Se necesitaría una fuerza externa para poner al cuerpo en movimiento, pero *ninguna fuerza externa para mantener al cuerpo en movimiento a velocidad constante*.

Es difícil hallar una situación en la cual ninguna fuerza externa actúe sobre un cuerpo. La fuerza de la gravedad actuará sobre un objeto en o cerca de la Tierra, y fuerzas resistivas tales como la fricción o la resistencia del aire se oponen al movimiento en el suelo o en el aire. Afortunadamente, no necesitamos ir al vacío del espacio distante para estudiar el movimiento libre de una fuerza externa porque, al menos en lo que concierne al movimiento de traslación total de un cuerpo, *no hay distinción entre un cuerpo sobre el cual no actúe una fuerza externa y un cuerpo sobre el cual la suma o resultante de todas las fuerzas externas sea cero*. Usualmente nos referimos a la resultante de todas las fuerzas que actúan sobre un cuerpo como la fuerza “neta”. Por ejemplo, el empuje de nuestra mano sobre el bloque al deslizarse puede ejercer una fuerza que contrarreste a la fuerza de fricción que actúa sobre el bloque, y una fuerza hacia arriba del plano horizontal contrarrestaría a la fuerza de la gravedad. La fuerza neta sobre el bloque puede entonces ser cero, y el bloque puede moverse a velocidad constante.

Este principio fue adoptado por Newton como la primera de sus tres leyes del movimiento:

*Considérese un cuerpo sobre el cual no actúe alguna fuerza neta. Si el cuerpo está en reposo, permanecerá en reposo. Si el cuerpo está moviéndose a velocidad constante, continuará haciéndolo así.*

La primera ley de Newton es un verdadero enunciado acerca de los marcos de referencia. En general, la aceleración de un cuerpo depende del marco de referencia con relación al cual se mide. Sin embargo, las leyes de la mecánica clásica son válidas solamente en un cierta serie de marcos de referencia, es decir, de aquellos para los cuales todos los observadores medirían *la misma* aceleración en un cuerpo en movimiento. La primera ley de Newton nos ayuda a identificar esta familia de marcos de referencia si la expresamos como sigue:

*Si la fuerza neta que actúa sobre un cuerpo es cero, entonces es posible hallar un conjunto de marcos de referencia en los cuales ese cuerpo no tenga aceleración.*

La tendencia de un cuerpo a permanecer en reposo o en un movimiento lineal uniforme se llama *inercia*, y la primera ley de Newton suele llamarse también *la ley de la inercia*. Los marcos de referencia a los cuales se aplica se llaman *marcos inerciales*, como ya hemos visto en la sección 4-6. Como el lector recordará, los observadores en diferentes marcos de referencia inerciales (que se muevan a velocidad constante en relación uno con otro) miden todos el mismo valor de la aceleración. Entonces, no existe un marco único en el que la aceleración sea cero; existe un conjunto de marcos inerciales en los cuales la aceleración es cero.

Para probar si un marco de referencia en particular es un marco inercial, situamos un cuerpo de prueba en reposo dentro del marco y nos aseguramos de que no exista ninguna fuerza neta actuando sobre él. Si el cuerpo no permanece en reposo, el marco no es un marco inercial. Asimismo, podemos situar al cuerpo (de nuevo no sujeto a ninguna fuerza neta) en movimiento a velocidad constante; si su velocidad cambia, ya sea en magnitud o en dirección, el marco no es un marco inercial. Un marco en el que estas pruebas hayan pasado en todas sus partes es un marco inercial. Una vez que hayamos encontrado un marco inercial, es fácil encontrar muchos más, porque un marco de referencia que se mueva a velocidad constante en relación a un marco inercial es también un marco inercial.

En este libro casi siempre aplicamos las leyes de la mecánica clásica desde el punto de vista de un observador en un marco inercial. Ocasionalmente, estudiaremos problemas que incluyan a observadores en marcos de referencia no inerciales, tales como un automóvil en aceleración, un tiovivo que gira, o un satélite en órbita. Aun cuando la Tierra esté girando, en la mayoría de los casos prácticos puede considerarse que un marco de referencia unido a la Tierra es aproximadamente un marco de referencia inercial. En aplicaciones a gran escala, tales como el análisis de la trayectoria de los cohetes balísticos (misiles) o en el estudio de los vientos y de las corrientes oceánicas, es importante el carácter no inercial de la Tierra en rotación.

Nótese que no existe en la primera ley una distinción entre un cuerpo en reposo y uno que se mueva a velocidad constante. Ambos movimientos son “naturales” si la fuerza neta que actúa sobre el cuerpo es cero. Esto resulta claro cuando un cuerpo en reposo situado en un marco inercial es visto desde un segundo marco inercial, esto es, cuando un marco se mueva a velocidad constante con respecto al primero. Un observador en el primer marco encuentra que el cuerpo está en reposo; un observador en el segundo marco encuentra que el mismo cuerpo se mueve a veloci-

dad constante. Ambos observadores encuentran que el cuerpo no tiene aceleración, esto es, no cambia su velocidad, y ambos pueden concluir de la primera ley que no actúa sobre el cuerpo una fuerza neta.

Si existe una interacción neta entre el cuerpo y los objetos presentes en el entorno, el efecto puede ser un cambio en el estado "natural" del movimiento del cuerpo. Para investigar esto, debemos ahora examinar cuidadosamente el concepto de fuerza.

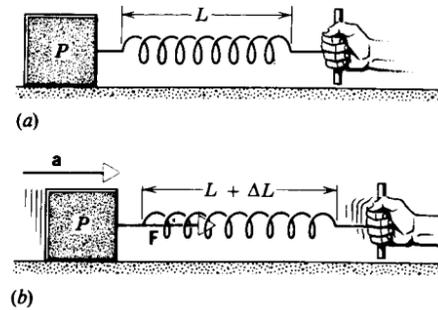


Figura 2 (a) Una "partícula"  $P$  (el kilogramo estándar) en reposo sobre una superficie horizontal sin fricción. (b) El cuerpo es acelerado jalando el resorte hacia la derecha.

### 5-3 FUERZA

Desarrollaremos nuestro concepto de fuerza definiéndolo operacionalmente. En el lenguaje cotidiano, una fuerza es un empuje o un jalón. Para medir tales fuerzas en forma cuantitativa, las expresamos en términos de la aceleración que determinado cuerpo estándar experimenta en respuesta a esa fuerza.

Como cuerpo normal encontramos conveniente emplear (o mejor, ¡imaginar que lo empleamos!) el kilogramo estándar (véase la Fig. 5 del capítulo 1). A este cuerpo se le ha asignado, por definición, una masa  $m_0$  de 1 kg exactamente. Más tarde describiremos cómo se asignan las masas a otros cuerpos.

Para tener un entorno que ejerza una fuerza, situamos al cuerpo estándar sobre una mesa horizontal que tenga una fricción despreciable y le unimos un resorte. Mantenemos el otro extremo del resorte en la mano, como en la figura 2a. Ahora jalamos del resorte horizontalmente hacia la derecha de modo que, por ensayo y error, podamos dar al cuerpo estándar una aceleración constante medida de  $1 \text{ m/s}^2$  exactamente. Entonces afirmamos, a modo de definición, que el resorte (que es el cuerpo significativo dentro del entorno) está ejerciendo sobre el kilogramo estándar una fuerza constante cuya magnitud llamaremos "1 newton" (abreviado, 1 N). Observamos que, al impartir esta fuerza, el resorte se estira una cantidad  $\Delta L$  sobre su longitud  $L$  normal no extendido, como muestra la figura 2b.

Podemos repetir el experimento, ya sea estirando más el resorte o usando un resorte más rígido, de modo que midamos una aceleración de  $2 \text{ m/s}^2$  en el cuerpo estándar. Declaramos ahora que el resorte está ejerciendo una fuerza de 2 N sobre el cuerpo estándar. En general, si observamos que este cuerpo estándar en particular tiene una aceleración  $a$  en un entorno determinado, podemos entonces decir que el entorno está ejerciendo una fuerza  $F$  sobre el cuerpo estándar de 1 kg, donde  $F$  (en newton) es numéricamente igual a  $a$  (en  $\text{m/s}^2$ ).

Veamos ahora si la fuerza, tal como la hemos definido, es una cantidad *vectorial*. En la figura 2b asignamos una magnitud a la fuerza  $F$ , y es fácil asignarle también una dirección, esto es, la dirección de la aceleración que la fuerza produce. Sin embargo, ser un vector no es

suficiente para que una cantidad tenga magnitud y dirección; debe también obedecer las leyes de la suma de vectores descritas en el capítulo 3. Si las fuerzas, tal como las definimos, obedecen realmente a estas leyes, es algo que sólo podemos aprender mediante la experimentación.

Ejercemos una fuerza de 4 N a lo largo del eje  $x$  y una fuerza de 3 N a lo largo del eje  $y$ . Apliquemos estas fuerzas primero por separado y luego simultáneamente al cuerpo estándar situado, como antes, sobre una superficie horizontal carente de fricción. ¿Cuál será la aceleración del cuerpo estándar? Hallaremos por experimentación que la fuerza de 4 N en la dirección  $x$  produjo una aceleración de  $4 \text{ m/s}^2$  en la dirección  $x$ , y que la fuerza de 3 N en la dirección  $y$  produjo una aceleración de  $3 \text{ m/s}^2$  en la dirección  $y$  (Fig. 3a). Cuando las fuerzas se aplican simultáneamente, como se muestra en la figura 3b, hallamos que la aceleración es de  $5 \text{ m/s}^2$  dirigida a lo largo de una línea que forma un ángulo de  $37^\circ$  con el eje  $x$ . Ésta es la misma aceleración que sería producida si el cuerpo estándar estuviera experimentando una fuerza de 5 N en esa dirección. Este mismo resultado puede ser obtenido si primero sumamos vectorialmente las fuerzas de 4 N y de 3 N (Fig. 3c) a una resultante de 5 N dirigida a  $37^\circ$  del eje  $x$ , y luego aplicamos esa simple fuerza neta de 5 N al cuerpo. Los experimentos de esta clase demuestran sin lugar a dudas que las fuerzas son vectores: tienen magnitud y dirección, y se suman de acuerdo con la ley de la suma de vectores.

Obsérvese que disponemos de dos métodos de análisis, los cuales producirían resultados idénticos: (1) Hallar la aceleración producida por cada fuerza separada, y sumar vectorialmente las aceleraciones resultantes. (2) Sumar las fuerzas vectorialmente a una sola resultante, y luego hallar la aceleración cuando esa sola fuerza neta se ejerce en el cuerpo.

### 5-4 MASA

En la sección 5-3 consideramos solamente las aceleraciones dadas a un cuerpo en particular, el kilogramo estándar.

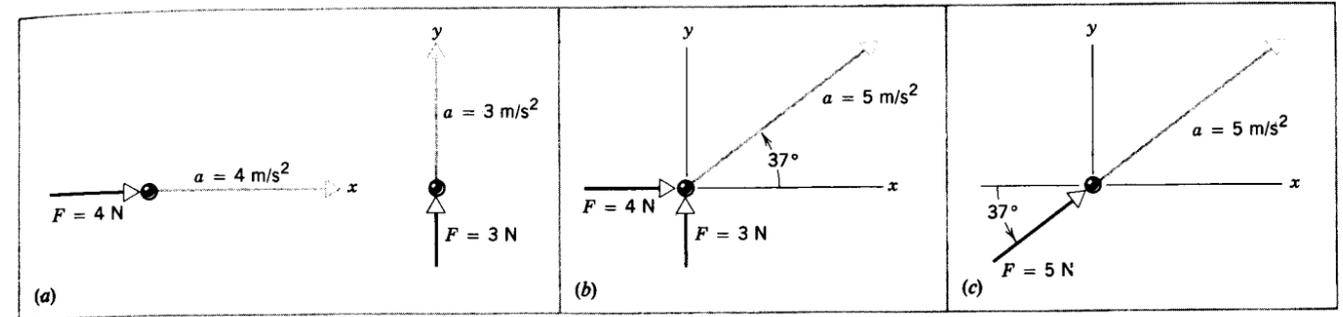


Figura 3 (a) Una fuerza de 4 N en dirección  $x$  produce una aceleración de  $4 \text{ m/s}^2$  en dirección  $x$ , y una fuerza de 3 N en dirección  $y$  produce una aceleración de  $3 \text{ m/s}^2$  en dirección  $y$ . (b) Cuando las fuerzas se aplican simultáneamente, la aceleración resultante es de  $5 \text{ m/s}^2$  en la dirección mostrada. (c) La misma aceleración puede ser producida por una sola fuerza de 5 N en la dirección mostrada.

Nos fue posible por tanto definir a las fuerzas cuantitativamente. ¿Qué efecto causarían esas fuerzas sobre otros cuerpos? Ya que nuestro cuerpo estándar fue escogido arbitrariamente en el primer lugar, sabemos que para cualquier cuerpo dado la aceleración será directamente proporcional a la fuerza aplicada. La pregunta significativa resultante es, entonces: ¿Qué efecto tendría la misma fuerza sobre cuerpos diferentes?

La experiencia cotidiana nos da una respuesta cualitativa. La misma fuerza producirá aceleraciones diferentes sobre cuerpos diferentes. Una bola de béisbol será acelerada más por una fuerza dada de lo que lo sería un automóvil. Con objeto de obtener una respuesta cuantitativa a esta pregunta, necesitamos un método para medir la masa, la propiedad de un cuerpo que determina su resistencia a un cambio en su movimiento.

Unamos un resorte a nuestro cuerpo estándar (el kilogramo estándar, al cual asignamos arbitrariamente una masa de  $m_0 = 1 \text{ kg}$ , exactamente) y démosle una aceleración  $a_0$  de, digamos,  $2.00 \text{ m/s}^2$  usando el método de la figura 2b. Midamos cuidadosamente la extensión  $\Delta L$  del resorte asociada a la fuerza que el resorte está ejerciendo sobre el bloque.

Unamos ahora dos cuerpos estándar idénticos al resorte y apliquemos la misma fuerza que antes (esto es, jalemos de los dos cuerpos hasta que el resorte se estire la misma cantidad  $\Delta L$ ). Medimos la aceleración de los dos cuerpos, y obtenemos el valor de  $1.00 \text{ m/s}^2$ . Si usáramos tres cuerpos estándar idénticos y aplicásemos la misma fuerza, obtendríamos una aceleración de  $0.667 \text{ m/s}^2$ .

A partir de estas observaciones parece que, para una fuerza dada, cuanto más grande sea la masa menor será la aceleración. Más precisamente, concluimos de tales experimentos que la aceleración producida por una fuerza dada es inversamente proporcional a la masa que es acelerada. Otra manera de decir esto sería: la masa de un cuerpo es inversamente proporcional a la aceleración

que recibe por la aplicación de una fuerza dada. La masa de un cuerpo puede entonces considerarse como una medida cuantitativa de la resistencia de un cuerpo a la aceleración producida por una fuerza dada.

Esta observación nos da una manera directa de comparar las masas de cuerpos diferentes: simplemente comparamos las aceleraciones medidas por la aplicación de una fuerza determinada a cada cuerpo. La razón de las masas de los dos cuerpos es entonces la misma que la razón inversa de las aceleraciones dadas a estos cuerpos por esa fuerza, o sea

$$\frac{m_1}{m_0} = \frac{a_0}{a_1} \quad (\text{actuando la misma fuerza } F).$$

Aquí estamos comparando la aceleración  $a_1$  del cuerpo de masa desconocida  $m_1$  con la aceleración  $a_0$  impartida al cuerpo estándar de masa  $m_0$ .

Por ejemplo, supongamos como antes que usamos una fuerza que produzca una aceleración de  $2.00 \text{ m/s}^2$  sobre el cuerpo estándar. Aplicamos la misma fuerza (estirando el resorte en la misma cantidad  $\Delta L$ ) a un cuerpo de masa desconocida  $m_1$ , y medimos una aceleración  $a_1$  de, digamos,  $0.50 \text{ m/s}^2$ . Podemos entonces resolver para la masa desconocida, lo cual nos da

$$m_1 = m_0 \left( \frac{a_0}{a_1} \right) = (1.00 \text{ kg}) \left( \frac{2.00 \text{ m/s}^2}{0.50 \text{ m/s}^2} \right) = 4.00 \text{ kg}.$$

El segundo cuerpo, que tiene solamente un cuarto de la aceleración del primer cuerpo cuando actúa sobre él la misma fuerza, tiene cuatro veces la masa del primer cuerpo. Esto ilustra la relación inversa entre masa y aceleración para una fuerza dada.

Repitamos ahora el experimento anterior sobre los mismos dos cuerpos usando una fuerza común  $F'$  diferente a la usada anteriormente. Esta fuerza dará al cuerpo estándar una aceleración de  $a'_0$  y al cuerpo desconocido una aceleración de  $a'_1$ . De nuestra medición hallaríamos que la

razón de las aceleraciones,  $a'_0/a'_1$ , es la misma que en el experimento previo, es decir,

$$\frac{m_1}{m_0} = \frac{a_0}{a_1} = \frac{a'_0}{a'_1}$$

Por ejemplo, apliquemos una fuerza más grande de modo que la extensión del resorte sea de  $1.5\Delta L$ . Hallaríamos entonces que la masa estándar  $m_0$  se acelera a razón de  $3.00 \text{ m/s}^2$  y que la masa desconocida  $m_1$  se acelera a razón de  $0.75 \text{ m/s}^2$ . Deduciríamos que la masa desconocida es

$$m_1 = m_0 \left( \frac{a'_0}{a'_1} \right) = (1.00 \text{ kg}) \left( \frac{3.00 \text{ m/s}^2}{0.75 \text{ m/s}^2} \right) = 4.00 \text{ kg}$$

Obtenemos el mismo valor para la masa desconocida  $m_1$ , no importa cuál sea el valor de la fuerza común. La razón de las masas  $m_1/m_0$  es independiente de la fuerza común empleada; la masa es una propiedad fundamental del objeto, sin relación alguna con el valor de la fuerza usada para comparar a la masa desconocida con la masa estándar. En efecto, este procedimiento nos permite medir la masa por comparación con el kilogramo estándar.

Podemos extender este procedimiento a una comparación directa de las masas de dos cuerpos cualesquiera. Por ejemplo, usemos primero nuestro procedimiento previo para comparar a un segundo cuerpo arbitrario con el cuerpo estándar, y determinemos entonces su masa, digamos  $m_2$ . Podemos ahora comparar a los dos cuerpos arbitrarios,  $m_2$  y  $m_1$ , directamente, y obtener las aceleraciones  $a''_2$  y  $a''_1$  cuando es aplicada la misma fuerza  $F''$ . La razón de las masas, definida como es usual por

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{a''_1}{a''_2} \quad (\text{actuando la misma fuerza}),$$

resulta tener el mismo valor que el que obtuvimos usando las masas  $m_2$  y  $m_1$  determinadas previamente por comparación directa con el estándar.

Podemos demostrar, en otro experimento más de este tipo, que si los objetos de masa  $m_1$  y  $m_2$  se unen entre sí, se comportan mecánicamente como un solo objeto de masa  $(m_1 + m_2)$ . En otras palabras, *las masas se suman como (y son) cantidades escalares*.

Un ejemplo práctico del uso de esta técnica (asignar masas por comparación de las aceleraciones relativas producidas por una fuerza dada) consiste en la medición precisa de las masas de los átomos. La fuerza en este caso es una fuerza magnética de desviación y la aceleración es centrípeta, pero el principio es exactamente el mismo. Para una fuerza magnética común que actúe sobre dos átomos, la razón de sus masas es igual a la razón inversa de sus aceleraciones. La medición de la desviación, como en el espectrómetro de masas mostrado en la figura 6 del capítulo 1, nos permite la medición precisa de las razones de masa, y la definición de  $^{12}\text{C}$  como el estándar permite entonces la obtención de valores precisos de las masas, tales como los mostrados en la tabla 6 del capítulo 1.

### 5-5 SEGUNDA LEY DE NEWTON

Podemos ahora resumir todos los experimentos y definiciones descritos anteriormente en una ecuación, la ecuación fundamental de la mecánica clásica,

$$\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a}. \quad (1)$$

En esta ecuación  $\Sigma \mathbf{F}$  es la *suma (vectorial) de todas las fuerzas que actúan sobre el cuerpo*,  $m$  es la masa del cuerpo, y  $\mathbf{a}$  es su aceleración (vectorial). Usualmente nos referiremos a  $\Sigma \mathbf{F}$  como la fuerza *resultante*, o fuerza *neta*.

La ecuación (1) es un enunciado de la segunda ley de Newton. Si la escribimos en la forma  $\mathbf{a} = (\Sigma \mathbf{F})/m$ , podremos ver fácilmente que la aceleración del cuerpo es, en magnitud, directamente proporcional a la fuerza resultante que actúa sobre él en dirección paralela a esta fuerza. Vemos también que la aceleración, para una fuerza dada, es inversamente proporcional a la masa del cuerpo.

Obsérvese que la primera ley del movimiento parece estar contenida en la segunda ley como un caso especial, ya que si  $\Sigma \mathbf{F} = 0$ , entonces  $\mathbf{a} = 0$ . En otras palabras, si la fuerza resultante sobre un cuerpo es cero, la aceleración del cuerpo es cero y el cuerpo se mueve a velocidad constante, como nos dice la primera ley. Sin embargo, la primera ley tiene un papel independiente e importante para definir marcos de referencia inerciales. Sin esa definición, no nos sería posible elegir los marcos de referencia a los cuales aplicar la segunda ley. Por lo tanto, necesitamos *ambas leyes* para un sistema de mecánica completo.

La ecuación (1) es una ecuación vectorial. Como en el caso de todas las ecuaciones vectoriales, podemos escribir esta simple ecuación vectorial como tres ecuaciones escalares,

$$\Sigma F_x = ma_x, \quad \Sigma F_y = ma_y, \quad \text{y} \quad \Sigma F_z = ma_z, \quad (2)$$

que relacionan a las componentes  $x$ ,  $y$ , y  $z$  de la fuerza resultante ( $\Sigma F_x$ ,  $\Sigma F_y$ , y  $\Sigma F_z$ ) con las componentes  $x$ ,  $y$ , y  $z$  de la aceleración ( $a_x$ ,  $a_y$ , y  $a_z$ ) para la masa  $m$ . Debería recalarse que  $\Sigma F_x$  es la suma *algebraica* de las componentes  $x$  de *todas* las fuerzas,  $\Sigma F_y$  es la suma *algebraica* de las componentes  $y$  de *todas* las fuerzas, y  $\Sigma F_z$  es la suma *algebraica* de las componentes  $z$  de *todas* las fuerzas que actúan sobre  $m$ . Al practicar la suma algebraica, deben tomarse en cuenta los signos de las componentes (esto es, las direcciones relativas de las fuerzas).

Al analizar situaciones que empleen la segunda ley de Newton, es de ayuda trazar un diagrama que muestre al cuerpo en cuestión como una partícula y que muestre igualmente a todas las fuerzas como vectores que actúan sobre la partícula. A un diagrama así se le llama *diagrama del cuerpo libre* y constituye un primer paso esencial tanto

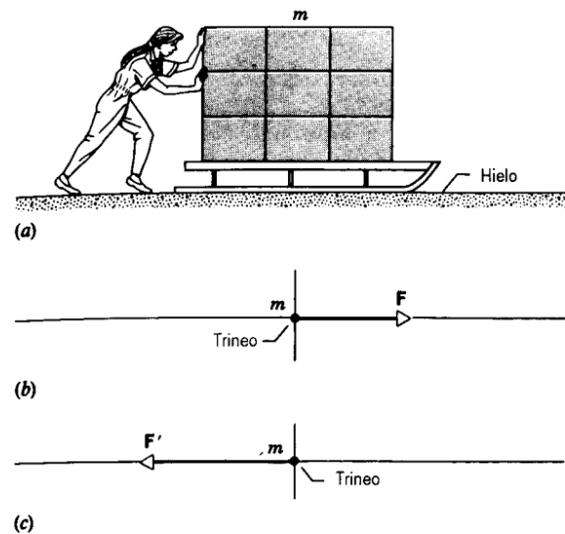


Figura 4 Problemas muestra 1 y 2. (a) Una estudiante empuja un trineo cargado sobre una superficie sin fricción. (b) Un diagrama del cuerpo libre, que muestra al trineo como una "partícula" y a la fuerza que actúa sobre él. (c) Un segundo diagrama del cuerpo libre, que muestra a la fuerza que actúa cuando la estudiante empuja en dirección opuesta.

en el análisis de un problema como en la visualización de la situación física.

**Problema muestra 1** Una estudiante empuja un trineo cargado cuya masa  $m$  es de  $240 \text{ kg}$  a través de una distancia  $d$  de  $2.3 \text{ m}$  sobre la superficie sin fricción de un lago helado. Ella ejerce una fuerza horizontal constante  $F$  de  $130 \text{ N}$  ( $= 29 \text{ lb}$ ) cuando lo hace; véase la figura 4a. Si el trineo parte del reposo, ¿cuál es su velocidad final?

**Solución** Como lo muestra la figura 4b, trazamos un eje horizontal  $x$ , hacemos que la dirección creciente de  $x$  sea hacia la derecha, y tratamos al trineo como una partícula. La figura 4b es un diagrama *parcial* del cuerpo libre. Al trazar diagramas del cuerpo libre, siempre es importante incluir a *todas* las fuerzas que actúan sobre la partícula, pero aquí hemos omitido a dos fuerzas verticales que veremos más adelante en este capítulo y que no afectan a nuestra solución. Supongamos que la fuerza  $F$  ejercida por la estudiante es la única fuerza horizontal que actúa sobre el trineo. Podemos entonces hallar la aceleración del trineo por la segunda ley de Newton, es decir,

$$a = \frac{F}{m} = \frac{130 \text{ N}}{240 \text{ kg}} = 0.54 \text{ m/s}^2$$

A causa de que la aceleración es constante, podemos usar la ecuación 20 del capítulo 2 [ $v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$ ] para hallar la velocidad final. Poniendo  $v_0 = 0$  y  $x - x_0 = d$  y resolviendo para  $v$ , obtenemos

$$v = \sqrt{2ad} = \sqrt{(2)(0.54 \text{ m/s}^2)(2.3 \text{ m})} = 1.6 \text{ m/s}$$

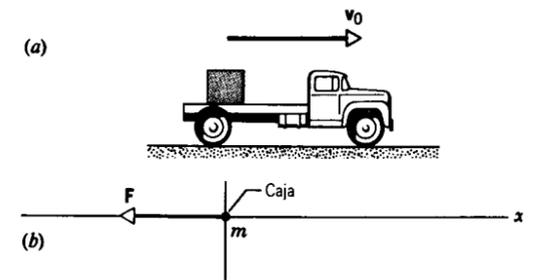


Figura 5 Problema muestra 3. (a) Una caja sobre un camión que está reduciendo su marcha. (b) El diagrama del cuerpo libre de la caja.

La fuerza, la aceleración, el desplazamiento, y la velocidad final del trineo son todas positivas, lo que significa que apuntan hacia la derecha en la figura 4b.

Obsérvese que para continuar aplicando la fuerza constante, la estudiante tendría que correr más y más aprisa para mantenerse a la par con el trineo que acelera. Eventualmente, la velocidad del trineo superaría a la velocidad más alta a la cual puede correr la estudiante, por lo que la estudiante ya no podría aplicar una fuerza al trineo por más tiempo. El trineo continuaría (en ausencia de la fricción) deslizándose a una velocidad constante.

**Problema muestra 2** La estudiante del problema muestra 1 quiere invertir la dirección de la velocidad del trineo en  $4.5 \text{ s}$ . ¿Con qué fuerza constante deberá empujar al trineo para conseguirlo?

**Solución** Hallemos la aceleración (constante) usando la ecuación 15 del capítulo 2 ( $v = v_0 + at$ ). Resolviendo para  $a$  tenemos que

$$a = \frac{v - v_0}{t} = \frac{(-1.6 \text{ m/s}) - (1.6 \text{ m/s})}{4.5 \text{ s}} = -0.71 \text{ m/s}^2$$

Esta magnitud es más grande que la aceleración del problema muestra 1 ( $0.54 \text{ m/s}^2$ ) lo que nos lleva a concluir que la estudiante tendrá que empujar más fuerte esta vez. Hallamos esta fuerza  $F'$  (constante) según

$$F' = ma = (240 \text{ kg})(-0.71 \text{ m/s}^2) = -170 \text{ N} (= -38 \text{ lb})$$

El signo negativo demuestra que la estudiante está empujando al trineo en dirección de  $x$  decreciente, es decir, hacia la izquierda como lo muestra el diagrama del cuerpo libre de la figura 4c.

**Problema muestra 3** Una caja cuya masa  $m$  es de  $360 \text{ kg}$  reposa sobre la plataforma de un camión que se mueve a una velocidad  $v_0$  de  $120 \text{ km/h}$ , como en la figura 5a. El conductor acciona los frenos y reduce la velocidad  $v$  a  $62 \text{ km/h}$  en  $17 \text{ s}$ . ¿Qué fuerza (supuesta como constante) actúa sobre la caja durante este tiempo? Suponga que la caja no se desliza en la plataforma del camión.

**Solución** Primero hallamos la aceleración (constante) de la caja. Resolviendo la ecuación 15 del capítulo 2 ( $v = v_0 + at$ ) para  $a$  nos da

$$a = \frac{v - v_0}{t} = \frac{(62 \text{ km/h}) - (120 \text{ km/h})}{17 \text{ s}}$$

$$= \left(-3.41 \frac{\text{km}}{\text{h} \cdot \text{s}}\right) \left(\frac{1 \text{ h}}{3600 \text{ s}}\right) \left(\frac{1000 \text{ m}}{1 \text{ km}}\right) = -0.95 \text{ m/s}^2.$$

Ya que hemos tomado la derecha como el sentido positivo de la dirección horizontal, el vector aceleración debe apuntar hacia la izquierda.

La fuerza sobre la caja responde a la segunda ley de Newton:

$$F = ma$$

$$= (360 \text{ kg})(-0.95 \text{ m/s}^2) = -340 \text{ N}.$$

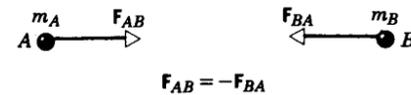
Esta fuerza actúa en la misma dirección de la aceleración, es decir, hacia la izquierda en la figura 5b. La fuerza debe ejercerla un agente externo, como son las fajas u otros medios mecánicos usados para sujetarla a la plataforma del camión. Si la caja no se sujeta, entonces la fricción entre la caja y la plataforma del camión debe proporcionar la fuerza necesaria. Si no existe la suficiente fricción como para proveer una fuerza de 340 N, la caja se deslizará sobre la plataforma porque, como lo puede medir un observador parado en el suelo, la caja desacelerará con más lentitud que el camión.

### 5-6 TERCERA LEY DE NEWTON

Las fuerzas que actúan sobre un cuerpo resultan de otros cuerpos que conforman su entorno. Si examinamos a las fuerzas que actúan sobre un segundo cuerpo, uno anteriormente considerado como parte del entorno, entonces el primer cuerpo es parte del entorno del segundo cuerpo y es, en parte, responsable de las fuerzas que actúan sobre el segundo cuerpo. Toda fuerza es por lo tanto parte de la interacción mutua entre dos cuerpos. Hallamos experimentalmente que cuando un cuerpo ejerce una fuerza sobre un segundo cuerpo, el segundo cuerpo siempre ejerce una fuerza sobre el primero. Más aún, hallamos que estas fuerzas son *siempre* iguales en magnitud pero opuestas en dirección. Una fuerza aislada es por lo tanto, algo imposible.

Supongamos que esto no fuera así. Consideremos a dos cuerpos aislados *A* y *B*, y supongamos que el cuerpo *A* ejerce una fuerza sobre el cuerpo *B*, mientras que ninguna fuerza se ejerce por *B* sobre *A*. La fuerza total sobre la combinación *A + B* no es cero, y la masa combinada debe acelerarse. Si una situación tal pudiera ocurrir, entonces tendríamos una fuente de energía sin límite que podría impulsar a *A + B* a través del espacio sin costo: los veleros podrían ser impulsados por pasajeros que soplaran sobre las velas, y los vehículos espaciales podrían ser acelerados por los astronautas que empujarían las paredes. La imposibilidad de estas acciones es una consecuencia de la tercera ley de Newton.

Arbitrariamente, llamamos a una de las fuerzas de la interacción mutua entre dos cuerpos la fuerza de "acción",



**Figura 6** Tercera ley de Newton. El cuerpo *A* ejerce una fuerza  $F_{BA}$  sobre el cuerpo *B*. El cuerpo *B* debe entonces ejercer una fuerza  $F_{AB}$  sobre el cuerpo *A*, y  $F_{AB} = -F_{BA}$ .

y a la otra la denominamos fuerza de "reacción". La tercera ley de Newton puede entonces ser establecida en la forma tradicional:

*A cada acción corresponde una reacción igual y opuesta.*

Una versión más moderna de la tercera ley pertenece a la fuerza mutua ejercida por dos cuerpos uno sobre el otro:

*Cuando dos cuerpos ejercen fuerzas mutuas entre sí, las dos fuerzas son siempre de igual magnitud y de dirección opuesta.*

Formalmente (véase la Fig. 6) hagamos que el cuerpo *A* ejerza una fuerza  $F_{BA}$  sobre el cuerpo *B*; el experimento demuestra entonces que el cuerpo *B* ejerce una fuerza  $F_{AB}$  sobre el cuerpo *A*. (Nótese el orden de los subíndices; la fuerza se ejerce *sobre* el cuerpo representado por el primer subíndice *por* el cuerpo representado por el segundo.) En términos de una ecuación vectorial,

$$F_{AB} = -F_{BA}. \quad (3)$$

Es importante recordar que las fuerzas de acción y reacción siempre actúan sobre cuerpos *diferentes*, como nos lo indican los primeros subíndices diferentes. Si actuaran sobre el mismo cuerpo, no existiría fuerza neta sobre ese cuerpo ni movimiento acelerado.

Cuando un bate de béisbol golpea a la pelota, el bate ejerce una fuerza sobre la pelota (la acción), y la pelota ejerce una fuerza igual y opuesta sobre el bate. Cuando un jugador de fútbol soccer patea la pelota, el pie ejerce una fuerza sobre la pelota (la acción), y la pelota ejerce una fuerza de reacción opuesta en el pie. Si usted trata de empujar un automóvil parado, podrá comprobar que éste ejerce presión hacia usted. En cada caso las fuerzas de acción y de reacción actúan sobre diferentes cuerpos. Si nuestro propósito consistiera en el estudio de la dinámica de un cuerpo, como la pelota de béisbol, por ejemplo, consideraríamos únicamente una fuerza del par acción-reacción; en cuanto a la otra, es percibida por un cuerpo diferente y sólo se consideraría si estuviéramos estudiando la dinámica de ese cuerpo.

Los siguientes ejemplos ilustran aplicaciones de la tercera ley.

¿Por qué no? *Porque actúan sobre el mismo cuerpo: el libro.* Se anulan entre sí y, por lo tanto, afirman el hecho de que el libro no acelere.

Cada una de estas fuerzas debe entonces tener una fuerza de reacción correspondiente en algún lugar. ¿Dónde están? La reacción a  $F_{BE}$  es  $F_{EB}$ , la fuerza (gravitatoria) con la que el libro atrae a la Tierra. Mostramos este par acción-reacción en la figura 8b.

La figura 8c muestra la fuerza de reacción a  $F_{BT}$ . Es  $F_{TB}$ , la fuerza de contacto sobre la mesa debida al libro. Los pares acción-reacción que actúan sobre el libro en este problema, y los cuerpos sobre los que actúan, son:

primer par:  $F_{BE} = -F_{EB}$  (libro y Tierra)

y

segundo par:  $F_{BT} = -F_{TB}$  (libro y mesa).

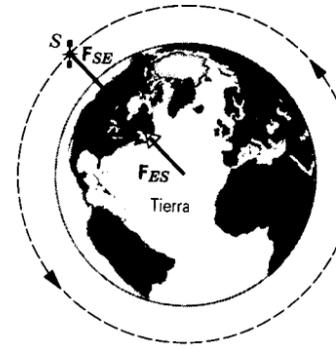
3. *Empujando una fila de cajas.* La figura 9 muestra a un obrero *W* empujando dos cajas, cada una de las cuales descansa sobre un carrito que puede rodar con fricción despreciable. El obrero ejerce una fuerza  $F_{1W}$  sobre la caja 1, la cual a su vez empuja contra el obrero con una fuerza de reacción  $F_{W1}$ . La caja 1 empuja sobre la caja 2 con una fuerza  $F_{21}$ , y la caja 2 empuja contra la caja 1 con una fuerza  $F_{12}$ . (Nótese que el obrero no ejerce fuerza sobre la caja 2 directamente.) Para moverse hacia adelante, el obrero debe empujar a su vez contra el suelo. El obrero ejerce una fuerza  $F_{GW}$  sobre el suelo, y la fuerza de reacción del suelo sobre el obrero,  $F_{WG}$ , empuja al obrero hacia adelante. La figura muestra tres pares de acción-reacción:

$$F_{21} = -F_{12} \text{ (caja 1 y caja 2),}$$

$$F_{1W} = -F_{W1} \text{ (obrero y caja 1),}$$

$$F_{WG} = -F_{GW} \text{ (obrero y suelo).}$$

La aceleración de la caja 2 se determina, de acuerdo con la segunda ley de Newton, por la fuerza neta aplicada a ella:



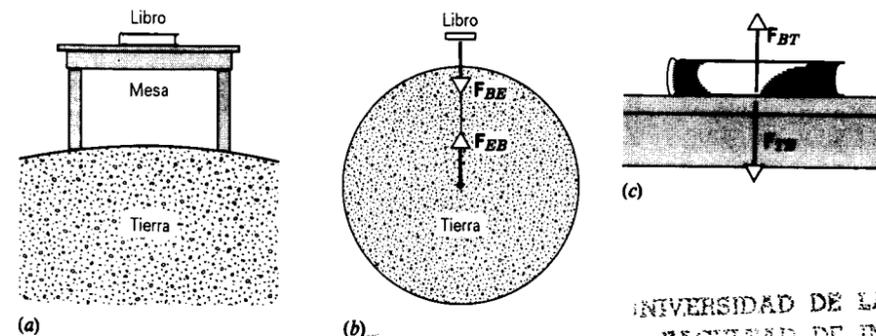
**Figura 7** Un satélite en órbita alrededor de la Tierra. Las fuerzas mostradas son el par acción-reacción. Nótese que actúan sobre cuerpos diferentes.

1. *Un satélite en órbita.* La figura 7 ilustra la órbita de un satélite alrededor de la Tierra. La única fuerza que actúa sobre él es  $F_{SE}$ , la fuerza ejercida *sobre* el satélite por la atracción gravitatoria de la Tierra. ¿Dónde está la fuerza de reacción correspondiente? Es  $F_{ES}$ , la fuerza que actúa sobre la Tierra debida a la atracción gravitatoria del satélite.

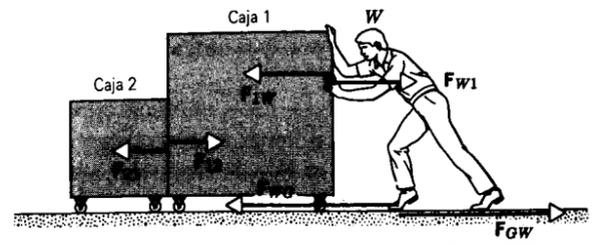
Podría pensarse que el pequeño satélite no ejerce mucha atracción gravitatoria sobre la Tierra pero sí lo hace, exactamente como lo enuncia la tercera ley de Newton. Esto es, al considerar solamente las magnitudes,  $F_{ES} = F_{SE}$ . (Recuérdese que la magnitud de cualquier cantidad vectorial es siempre positiva.) La fuerza  $F_{ES}$  hace que la Tierra se acelere, pero, a causa de la gran masa de la Tierra, su aceleración es tan pequeña que no puede ser detectada fácilmente.

2. *Un libro puesto sobre una mesa.* La figura 8a muestra un libro puesto sobre una mesa. La Tierra tira del libro hacia abajo con una fuerza  $F_{BE}$ . El libro no se acelera porque esta fuerza es cancelada por la fuerza de contacto  $F_{BT}$ , igual y opuesta, que ejerce la mesa sobre el libro.

Aun cuando  $F_{BE}$  y  $F_{BT}$  son de igual magnitud y de dirección opuesta, *no* constituyen un par acción-reacción.



**Figura 8** (a) Un libro puesto sobre una mesa, la cual a su vez está sobre la Tierra. (b) El libro y la Tierra ejercen fuerzas gravitatorias entre sí, formando un par acción-reacción. (c) La mesa y el libro ejercen fuerzas de contacto de acción-reacción entre sí.



**Figura 9** Un obrero empuja una caja 1, la cual a su vez empuja a la caja 2. Las cajas están sobre ruedas que se mueven libremente, de modo que no existe fricción entre las cajas y el suelo.

$$F_{21} = m_2 a_2.$$

La fuerza neta sobre la caja 1 determina su aceleración,

$$F_{1W} - F_{12} = m_1 a_1,$$

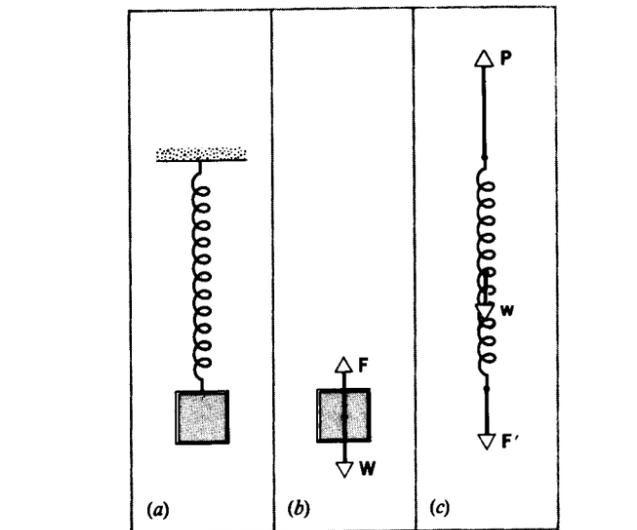
donde hemos escrito la suma vectorial de las fuerzas como la diferencia de sus magnitudes, porque actúan sobre la caja 1 en direcciones opuestas. Si las dos cajas permanecen en contacto, sus aceleraciones deben ser iguales. Si  $a$  representa la aceleración común y sumamos las ecuaciones, nos da

$$F_{1W} = (m_1 + m_2)a.$$

Si consideramos que las cajas 1 y 2 son un mismo objeto de masa  $m_1 + m_2$  resultaría esta misma ecuación. La fuerza externa neta que actúa sobre el objeto combinado es  $F_{1W}$ . Las dos fuerzas de contacto que existen en la frontera entre las cajas 1 y 2 no aparecen en la ecuación que describe al objeto *combinado*. Como tampoco aparecen las fuerzas atómicas internas que unen al objeto; cada fuerza interna forma un par acción-reacción que actúa sobre partes separadas (átomos individuales, quizá) y tales pares suman cero al sumar entre sí las partes separadas que forman la combinación total.

Nótese que en este ejemplo el obrero es el agente activo responsable del movimiento, pero es la fuerza de reacción del suelo la que lo hace posible. Si no hubiese fricción entre los zapatos del obrero y el suelo, el obrero no podría mover el sistema hacia adelante.

**4. Un bloque colgado de un resorte.** La figura 10a nos muestra un bloque en reposo que cuelga de un resorte, estando su otro extremo fijo en el techo. Las fuerzas sobre el bloque, mostradas por separado en la figura 10b, son su peso  $W$  (que actúa hacia abajo) y la fuerza  $F$  ejercida por el resorte (que actúa hacia arriba). El bloque está en reposo bajo la influencia de estas fuerzas, pero las fuerzas *no* son un par acción-reacción, porque, de nuevo, actúan sobre el mismo cuerpo. La fuerza de reacción al peso  $W$  es la



**Figura 10** (a) Un bloque en reposo colgado del techo por un resorte estirado. (b) Las fuerzas sobre el bloque. (c) Las fuerzas sobre el resorte.

fuerza gravitatoria que el bloque ejerce sobre la Tierra, fuerza que no se muestra.

La fuerza de reacción a  $F$  (la fuerza ejercida *sobre* el bloque *por* el resorte) es la fuerza ejercida *por* el bloque *sobre* el resorte. Para mostrar esta fuerza, ilustramos en la figura 10c las fuerzas que actúan sobre el resorte. Estas fuerzas incluyen la reacción a  $F$ , la cual mostramos como una fuerza  $F'$  ( $= -F$ ) que actúa hacia abajo, el peso  $w$  del resorte (generalmente despreciable), y el jalón  $P$  hacia arriba del techo. Si el resorte está en reposo, la fuerza neta debe ser cero:  $P + w + F' = 0$ .

La fuerza de reacción a  $P$  actúa *sobre* el techo. Puesto que en este diagrama no estamos mostrando al techo como un cuerpo independiente, la reacción a  $P$  no aparece.

### 5-7 UNIDADES DE FUERZA

Como todas las ecuaciones, la segunda ley de Newton ( $F = ma$ ) debe ser dimensionalmente consistente. En el lado derecho, las dimensiones son, recordando del capítulo 1 que  $[ ]$  denota *las dimensiones de*,  $[m][a] = ML/T^2$ , y por lo tanto éstas deben ser también las dimensiones de una fuerza:

$$[F] = ML/T^2.$$

No importa cuál sea el origen de la fuerza (gravitatoria, eléctrica, nuclear, o cualquiera otra) y no importa qué tan complicada sea la ecuación que describa a la fuerza, deben mantenerse para ella estas dimensiones.

En el sistema SI de unidades, la masa se mide en kg y la aceleración en  $m/s^2$ . Para impartir una aceleración de  $1 m/s^2$  a una masa de  $1 kg$  se requiere una fuerza de  $1 kg \cdot m/s^2$ . A esta combinación de unidades, en cierta forma inconveniente, se le ha dado el nombre de newton (abreviado N):

$$1 N = 1 kg \cdot m/s^2.$$

Si medimos la masa en kg y la aceleración en  $m/s^2$ , la segunda ley de Newton nos da la fuerza en N.

Existen otros dos sistemas de unidades de uso común, que son el sistema cegesimal cgs (centímetro-gramo-segundo) y el sistema inglés (o británico). En el sistema cgs, la masa se mide en gramos y la aceleración en  $cm/s^2$ . La unidad de fuerza en este sistema es la *dina* y equivale a  $g \cdot cm/s^2$ . Puesto que  $1 kg = 10^3 g$  y  $1 m/s^2 = 100 cm/s^2$ , se deduce que  $1 N = 10^5$  dinas. Una dina es una unidad muy pequeña, aproximadamente igual al peso de un milímetro cúbico de agua. (Por el contrario, un newton es aproximadamente el peso de media taza de agua.)

En el sistema inglés, la fuerza se mide en libras y la aceleración en  $pies/s^2$ . En este sistema, la masa que es acelerada a razón de  $1 pie/s^2$  por una fuerza de  $1 lb$  se llama *slug* (de la palabra *sluggish*, que significa lento o que no responde).

Ocasionalmente se encuentran otras variantes de estos sistemas básicos, pero estos tres son en mucho los más comunes. La tabla 2 resume estas unidades de fuerza comunes; en el apéndice G puede hallarse una lista más extensa.

### 5-8 PESO Y MASA

El *peso* de un cuerpo en la Tierra es la fuerza de gravedad ejercida sobre él por la Tierra. Como todas las fuerzas, el peso es una cantidad vectorial. La dirección de este vector es la dirección de la fuerza de la gravedad, esto es, hacia el centro de la Tierra. La magnitud del peso se expresa en unidades de fuerza, tales como libras, kilogramos o newtons.

Supongamos por el momento que la superficie de la Tierra proporciona un marco inercial de referencia suficientemente bueno. Soltemos a un cuerpo de masa  $m$  cerca de la superficie de la Tierra y permitamos que caiga libremente bajo la influencia de la gravedad. Sólo una fuerza actuará sobre el cuerpo: su peso  $W$ . La aceleración del cuerpo es la aceleración de la caída libre,  $g$ . Aplicamos la segunda ley de Newton,  $F = ma$ , a este cuerpo en caída libre sustituyendo a  $W$  por  $F$  y a  $g$  por  $a$ , lo cual nos da  $W = mg$ . Tanto  $W$  como  $g$  son vectores dirigidos hacia el centro de la Tierra. Podemos entonces escribir que

$$W = mg, \quad (4)$$

**TABLA 2 UNIDADES DE LA SEGUNDA LEY DE NEWTON**

Sistema	Fuerza	Masa	Aceleración
SI	newton (N)	kilogramo (kg)	$m/s^2$
cgs	dina	gramo (g)	$cm/s^2$
inglés	libra	slug	$pies/s^2$

donde  $W$  y  $g$  son las magnitudes de los vectores de peso y de aceleración.

Por supuesto, no es necesario que un cuerpo esté cayendo para determinar su peso. Si un cuerpo está en reposo cerca de la superficie de la Tierra, entonces la segunda ley de Newton requiere que la fuerza neta sobre él sea cero. El peso  $W = mg$  actúa sobre el cuerpo, y, por lo tanto, para que el cuerpo se mantenga en reposo debe experimentar otra fuerza numéricamente igual a  $mg$  pero que actúe en una dirección opuesta al peso. En la figura 10, el resorte suministra esta fuerza; la fuerza ejercida por el resorte sobre el cuerpo debe ser numéricamente igual a  $mg$ . En la figura 8, la mesa ejerce una fuerza  $F_{BT}$  hacia arriba sobre el libro que lo mantenía en equilibrio; esta fuerza hacia arriba es de magnitud igual al peso  $mg$ .

Ya que  $g$  varía entre puntos distintos de la Tierra,  $W$ , que es el peso de un cuerpo de masa  $m$ , es diferente en localidades distintas. Así, el peso de un cuerpo de  $1.00 kg$  de masa, en una localidad donde  $g = 9.80 m/s^2$ , será  $9.80 N$ ; en una localidad donde  $g = 9.78 m/s^2$ , el mismo cuerpo pesará  $9.78 N$ . Si estos pesos fuesen determinados midiendo la cantidad de estiramiento necesaria en un resorte para equilibrarlos, la diferencia de peso del mismo cuerpo de  $1 kg$  en dos localidades distintas se haría evidente en la distinta longitud de estiramiento del resorte de esas dos localidades. Por lo tanto, al contrario de la masa de un cuerpo, que es una propiedad *intrínseca* del cuerpo, el peso de un cuerpo depende de su ubicación en relación al centro de la Tierra. Como discutiremos en la sección siguiente, las básculas de resorte pueden marcar cantidades diferentes, pero las balanzas señalan lo mismo en diferentes localidades de la Tierra.

Ya que la Tierra está girando, su superficie no puede ser un marco inercial de referencia. Todos los marcos de referencia sobre la superficie de la Tierra son acelerados centrípetamente por la rotación. La aceleración en caída libre que medimos en este marco no inercial tiene por lo menos dos componentes: una que proviene de la atracción gravitatoria de la Tierra y otra de su rotación. El pequeño efecto de esta rotación consiste en el cambio de la aceleración en caída libre en un 0.3% aproximadamente con respecto a su valor en el ecuador, donde la aceleración centrípeta es la mayor, a su valor en los polos, donde la aceleración centrípeta se anula. Despreciamos esta pequeña contribución no inercial al peso por ahora, pero vuelve-

remos sobre ello en el capítulo 16. En la sección 6-8 se discuten otras contribuciones no inerciales a la fuerza sobre un cuerpo.

El peso de un cuerpo es cero en regiones del espacio donde los efectos de la gravitación son nulos, aunque las propiedades de un cuerpo que dependen de su masa, tales como su resistencia a ser acelerado, permanecen sin cambio con respecto a las mismas en la Tierra. En un vehículo espacial, libre de la influencia de la gravedad, levantar lentamente un bloque grande de plomo ( $W = 0$ ) es un asunto sencillo, pero el astronauta sentiría una sensación de dolor en los dedos del pie si pateara el bloque ( $m \neq 0$ ).

Requiere la misma fuerza acelerar un cuerpo en el espacio libre de gravedad que acelerarlo a lo largo de una superficie horizontal carente de fricción en la Tierra, ya que su masa es la misma en cada lugar. Pero se requiere una fuerza mayor para mantener a un cuerpo levantado contra la atracción de la Tierra en su superficie que la requerida en el espacio, porque su peso es distinto en cada lugar.

En localidades donde  $g$  tenga un valor específico, la masa y el peso son proporcionales entre sí. A veces escribimos, por ejemplo, 1 kg “=” 2.2 lb, donde “=” significa que “es equivalente a”. Ésta es una correspondencia numérica, no una ecuación real (¡porque las ecuaciones no puede igualar a cantidades con dimensiones diferentes!). Sería un poco como decir que 1 naranja “=”  $x$  manzanas, donde  $x$  pudiera tener un valor si estuviésemos discutiendo el costo y un valor muy diferente si estuviésemos discutiendo cuánto jugo producen.

La relación entre masa y peso es válida solamente para un valor específico de  $g$ , y, por lo tanto, debería de usarse con precaución. De otro modo, podríamos encontrarnos en una situación confusa o embarazosa. Por ejemplo, si usted algún día detuviera su nave espacial en un bien conocido restaurante de servicio rápido en la Luna y ordenara un hamburguesa de un cuarto de libra, le servirían un emparedado de casi 1 pie de diámetro. (La gravedad de la Luna es casi una sexta parte de la de la Tierra. En la Luna, 1 kg “=” 0.38 lb). Si usted coloca la misma orden sobre la superficie del Sol, su hamburguesa sería apenas de 1 pulgada de diámetro pero ¡muy cocida! (En el Sol, 1 Kg “=” 62 lb.) Obviamente, queremos ordenar nuestro alimento por cantidad de materia (masa), y no por peso. Una hamburguesa de 100 gramos (alrededor de  $\frac{1}{4}$  de libra en la Tierra) debe tener el mismo tamaño en todos los lugares.

### Ingravedez

Las fotografías de astronautas en un vehículo espacial en órbita (como en la Fig. 11) los muestran flotando libremente en un estado usualmente llamado “ingravedez”. Sin embargo, según nuestra definición de peso, no están del



**Figura 11** Los astronautas en el vehículo espacial están en un estado de caída libre, donde parecen flotar como si careciesen de peso.

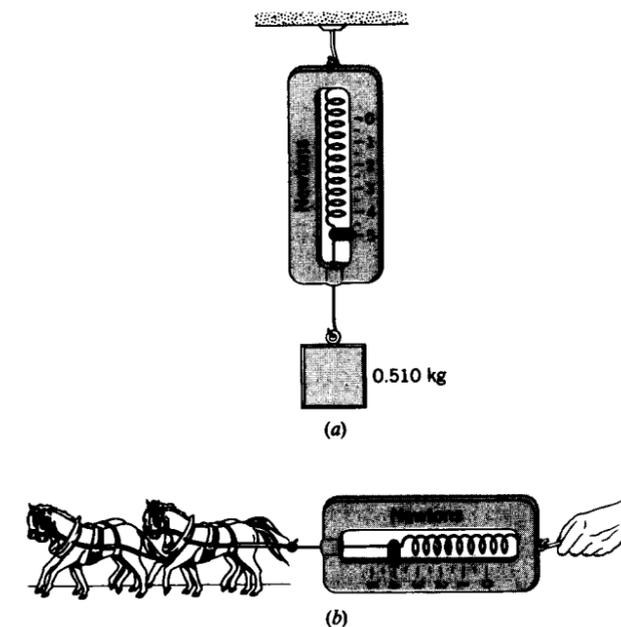
todo carentes de peso; de hecho, su peso es sólo alrededor del 10% menos de lo que sería si estuviesen parados sobre la superficie de la Tierra. Esta reducción ocurre porque la gravedad de la Tierra se vuelve más débil con el aumento de altitud.

Se dice que los astronautas en órbita están en estado de “ingravedez” por dos razones: (1) Para un observador externo, los astronautas están en caída libre hacia el centro de la Tierra. Mantienen su altitud sólo porque su velocidad tangencial ha sido elegida de modo que la gravedad provea la aceleración centrípeta necesaria para un movimiento circular uniforme. (2) No existe un suelo en contacto con ellos y que los empuje hacia arriba.

Nuestra percepción psicológica del peso implica la fuerza con la que el piso nos empuja. Al flotar en el agua, nosotros percibimos menos nuestro propio peso (pero percibimos plenamente nuestra *masa*, por ejemplo, cuando tratamos de acelerar nadando en el agua). Si estamos de pie en un ascensor mientras acelera, sentimos como si nuestro peso aumentara cuando el ascensor acelera hacia arriba y como si nuestro peso disminuyera cuando el ascensor acelera hacia abajo. Este efecto, que consideramos en el Problema muestra 7, es el resultado del aumento o disminución de la fuerza hacia arriba ejercida sobre nosotros por el suelo del ascensor.

La verdadera ingravedez sólo puede obtenerse en el espacio profundo, lejos de cualquier estrella o planeta, donde los astronautas flotarían libremente en una nave espacial a la deriva con los motores apagados. Si la nave estuviera girando sobre su eje, los astronautas que estuviesen parados perpendicularmente al eje de la superficie en rotación sentirían una “gravedad artificial”, porque el piso estaría empujándolos para suministrar la fuerza centrípeta necesaria para que se muevan en un círculo. El empuje del suelo hacia arriba se percibe como el peso.

Si nos echamos en clavado o saltamos rebotando desde un trampolín, descendemos en caída libre mientras estamos en el aire; no existe una superficie que nos empuje y sentimos la “ingravedez”. De igual manera, si estamos en caída libre cerca de la Tierra dentro de una cámara que esté también en caída libre, tampoco existe una superficie que nos empuje y podríamos considerarnos como “carentes de peso”. Flotaríamos libremente dentro de la cámara. Tres ejemplos de tal situación son (1) el vehículo espacial en órbita discutido anteriormente, (2) la cabina de un elevador que cae después de haberse roto el cable de suspensión, y (3) un aeroplano en vuelo a lo largo de una trayectoria parabólica elegida. Supongamos que el aeroplano asciende de modo que en determinado tiempo se mueve hacia arriba a velocidad  $v_0$  en una dirección que forme un ángulo  $\phi_0$  sobre la horizontal. Si usted fuese un pasajero de ese aeroplano, y si en ese instante el aeroplano desapareciese súbitamente, usted seguiría la trayectoria parabólica de la caída libre dada por la ecuación 23 del capítulo 4. Si en lugar de ello, en ese mismo instante, el piloto dirige al aeroplano de modo que siga esa misma trayectoria, el aeroplano estará, en efecto, en caída libre y los objetos dentro de él flotarán libremente en un estado de “ingravedez”. De hecho, este sistema se ha utilizado para entrenar a los astronautas a adaptarse a la “ingravedez” del vehículo espacial en órbita. En cada uno de estos tres casos, nuestro peso cambia sólo ligeramente con respecto al que tendría si estuviésemos parados sobre la superficie de la Tierra, pero la falta de un suelo que nos empuje nos lleva a tener la sensación de “no tener peso”.



**Figura 12** (a) Una báscula de resorte puede ser calibrada, en una región donde  $g$  sea conocida, colgando de ella una masa conocida y marcando la fuerza correspondiente al peso de la masa. En el caso que se muestra, una masa de 0.510 kg da  $F = 5.00$  N cuando  $g = 9.8$  m/s<sup>2</sup>. (b) La escala calibrada puede entonces ser usada para medir una fuerza desconocida. Ésta es la base de operación de todas las básculas de resorte, tal como la medidora de peso en el correo, la báscula para pesar los productos en las tiendas de abarrotes, y la báscula del cuarto de baño.

## 5-9 MEDICIÓN DE FUERZAS

En la sección 5-3 hemos definido la fuerza por la medida de la aceleración impartida a un cuerpo estándar jalando de él con un resorte estirado. Podemos llamar a esto método dinámico para la medición de la fuerza. Aunque conveniente para la definición, no siempre resulta un método particularmente práctico para la medición de fuerzas. (La aceleración rara vez es fácil de medir.) Otro método para medir fuerzas se basa en la medición del cambio de forma o de tamaño de un cuerpo (digamos, un resorte) sobre el que se aplique la fuerza cuando el cuerpo no es acelerado. Éste es el método estático de medir fuerzas.

La base del método estático es que cuando un cuerpo, bajo la acción de varias fuerzas, tiene una aceleración cero, la suma vectorial de todas las fuerzas que actúan sobre el cuerpo debe ser cero. Esto no es más que, por supuesto, la segunda ley del movimiento. Una sola fuerza que actúa sobre un cuerpo produciría una aceleración; ésta aceleración puede llegar a ser cero si aplicamos otra fuerza al cuerpo de igual magnitud pero de dirección

contraria. En la práctica buscamos mantener al cuerpo en reposo. Si ahora elegimos alguna fuerza como nuestra fuerza unitaria, estaríamos en la posición de medir fuerzas. Por ejemplo, la atracción de la Tierra sobre un cuerpo estándar en un punto en particular puede ser tomado como la unidad de fuerza.

Un instrumento comúnmente empleado para medir fuerzas de esta manera es la báscula de resorte (Fig. 12). Consta de un resorte enrollado con una aguja en un extremo que se mueve sobre una escala de medidas. Una fuerza ejercida sobre la báscula cambia la longitud del resorte. Si un cuerpo que pesa 1.00 N ( $m = 0.102$  kg, donde  $g = 9.80$  m/s<sup>2</sup>) se cuelga del resorte, éste se estira hasta que el jalón que ejerce sobre el cuerpo sea de igual magnitud pero de dirección opuesta a su peso. Puede hacerse una marca sobre la escala frente a la aguja y marcar “1.00-N de fuerza”. Similarmente, pesos de 2.00-N, 3.00-N, ... pueden suspenderse del resorte y hacer marcas correspondientes sobre la escala frente a la aguja en cada caso. De esta manera se calibra el resorte. Suponemos que la fuerza ejercida sobre el resorte es siempre la misma cuando la aguja se detiene en la misma posición. La

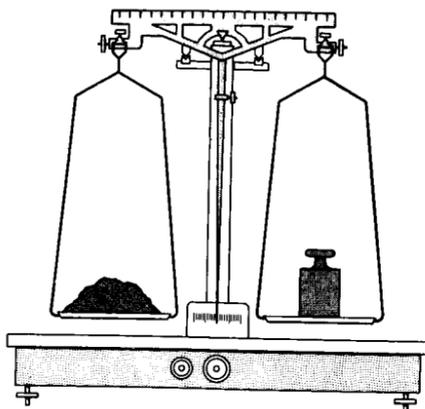


Figura 13 La balanza de brazos iguales, que compara los pesos de distintas masas.

báscula calibrada puede usarse ahora como en la figura 12b para medir una fuerza desconocida, y no únicamente para medir la fuerza de atracción que la Tierra ejerce.

La balanza de brazos iguales (Fig. 13) proporciona otro método estático para medir una fuerza. La aplicación más común implica comparar pesos conocidos con pesos desconocidos; cuando los brazos se nivelan, los pesos deben ser iguales. Más aún, a causa de que  $g$  es la misma para ambos brazos de la balanza, la igualdad de pesos implica la igualdad de masas. La balanza de brazos iguales determina entonces la igualdad relativa de las masas al pesarlas. (De hecho, las pesas conocidas que se suministran con tales balanzas están generalmente marcadas como masas en gramos.) Este sistema trabaja para cualquier valor de  $g$  excepto cero; la balanza trabajaría igualmente bien para comparar masas en la Luna, pero no trabajaría en absoluto en el espacio libre de gravedad o en la ingravidez relativa de las órbitas de la Tierra.

### 5-10 APLICACIONES DE LAS LEYES DE NEWTON

Si bien todo problema que debe resolverse por el uso de las leyes de Newton requiere un enfoque único, existen unas cuantas reglas generales que se aplican para determinar las soluciones a tales problemas. En esta sección presentamos las reglas e ilustramos su aplicación con varios ejemplos. La mejor manera de aprender las reglas es estudiar los ejemplos.

Los pasos básicos para aplicar las leyes de Newton son: (1) Identifique claramente el cuerpo que se va a analizar. A veces habrá dos o más de tales cuerpos; por lo general cada uno se trata independientemente. (2) Identifique el entorno en que serán ejercidas las fuerzas sobre el cuerpo (superficies, otros objetos, la Tierra, resortes, cuerdas,

etc.) (3) Seleccione un marco inercial de referencia sin aceleración apropiado. (4) Elija un sistema de coordenadas (en el marco de referencia elegido) conveniente, localice el origen, y oriente los ejes para simplificar el problema tanto como sea posible. Con el cuidado apropiado, puede elegirse un sistema de coordenadas diferente para cada componente de un problema complejo. (5) Haga un diagrama del cuerpo libre, mostrando a cada objeto como una partícula y a todas las fuerzas que actúan sobre él. (6) Aplique ahora la segunda ley de Newton a cada componente de la fuerza y de la aceleración.

En los siguientes ejemplos, hacemos algunas hipótesis que simplifican el problema a costa de alguna realidad física. Los cuerpos son tratados como partículas, de modo que se considere que todas las fuerzas que actúan sobre el cuerpo lo hacen en un solo punto. Suponemos que todo movimiento carece de fricción. Suponemos también que todas las cuerdas carecen de masa (no se requiere una fuerza para acelerar las cuerdas) y son inextensibles (no se estiran, de modo que los objetos en movimiento lineal unidos por cuerdas tirantes tienen las mismas velocidades y aceleraciones). Las poleas carecen de masa (no se requiere fuerza para que giren) y sus bujes carecen de fricción. Todos los cuerpos son rígidos (no ocurren deformaciones bajo la carga, y las fuerzas a través de ellos se transmiten instantáneamente). A pesar de estas simplificaciones, los ejemplos nos introducen a las técnicas básicas del análisis dinámico. Más adelante en este texto, añadiremos nuevas técnicas que nos permitan ser más realistas en nuestro análisis de situaciones físicas. Por ejemplo, en el capítulo 6 mostramos cómo puede incluirse a la fricción en el análisis, y en el capítulo 12 mostramos cómo explicar la masa de una polea y la fricción de sus chumaceras. Por ahora, no tomaremos en cuenta estos por demás importantes efectos, de modo que podamos centrarnos en los métodos más básicos usados para resolver los problemas.

En el siguiente problema muestra, introducimos la *tensión*  $T$ , la fuerza con la cual una cuerda jala de los objetos unidos a ella. En cuerdas de espesor despreciable, la dirección de la tensión debe ser siempre paralela a la cuerda misma. (Esta afirmación no sirve para vigas gruesas y sólidas, como lo discutiremos en el capítulo 14.) En cuerdas de masa despreciable, la tensión se transmite uniformemente a lo largo de la cuerda y es la misma en cada extremo.

Microscópicamente, cada elemento de la cuerda jala del elemento inmediato a él (y es a su vez jalado por ese elemento, según la tercera ley de Newton). De esta manera la fuerza que jala de un extremo de la cuerda es transmitida al objeto situado al otro extremo. Cualquier elemento  $i$  en particular de la cuerda experimenta una tensión  $T$  que actúa en una dirección debida al elemento  $i - 1$ , y una tensión igual  $T$  que actúa en dirección opuesta debida al elemento  $i + 1$ . Si fuésemos a cortar la cuerda en cualquier

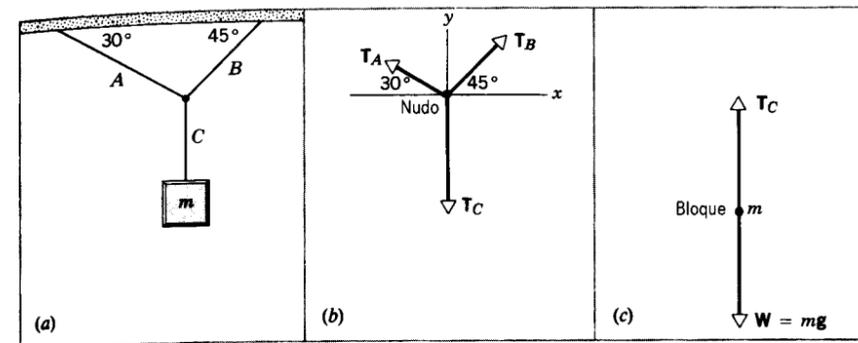


Figura 14 Problema muestra 4. (a) Un bloque cuelga de tres cuerdas A, B, y C. (b) El diagrama del cuerpo libre del nudo que une a las cuerdas. (c) El diagrama del cuerpo libre del bloque.

punto y unir una báscula de resorte (calibrada como lo describimos en la sección 5-9) a los extremos cortados, la báscula de resorte leería la tensión  $T$  directamente.

**Problema muestra 4** La figura 14a muestra un bloque de masa  $m = 15.0$  kg colgado de tres cuerdas. ¿Cuáles son las tensiones en las tres cuerdas?

**Solución** Consideremos que el nudo en el empalme de las tres cuerdas es "el cuerpo". La figura 14b muestra el diagrama del cuerpo libre del nudo, que permanece en reposo bajo la acción de las tres fuerzas  $T_A$ ,  $T_B$ , y  $T_C$ , las cuales son las tensiones en las cuerdas. (Suponemos que, al igual que la cuerda, el nudo carece de masa, de modo que su peso no aparece en el diagrama). Eligiendo los ejes  $x$  y  $y$  como se muestra en la figura 14b, podemos resolver las fuerzas en sus componentes  $x$  y  $y$ . Las componentes de la aceleración son cero, de modo que podemos escribir:

$$\begin{aligned} \text{componente } x: \quad \sum F_x = T_{Ax} + T_{Bx} = ma_x = 0, \\ \text{componente } y: \quad \sum F_y = T_{Ay} + T_{By} + T_{Cy} = ma_y = 0. \end{aligned}$$

En la figura 14b vemos que

$$\begin{aligned} T_{Ax} &= -T_A \cos 30^\circ = -0.866T_A, \\ T_{Ay} &= T_A \sin 30^\circ = 0.500T_A, \\ T_{Bx} &= T_B \cos 45^\circ = 0.707T_B, \\ T_{By} &= T_B \sin 45^\circ = 0.707T_B, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} T_{Cx} &= 0, \\ T_{Cy} &= -T_C. \end{aligned}$$

Para continuar, examinemos el diagrama del cuerpo libre de la masa  $m$ , que se muestra en la figura 14c. Sólo entran las componentes  $y$ , y una vez más la aceleración es cero:

$$T_{Cy} - mg = ma_y = 0.$$

A causa de que  $T_C$  tiene solamente una componente  $y$ , podemos escribir:

$$T_C = mg = (15.0 \text{ kg})(9.80 \text{ m/s}^2) = 147 \text{ N}.$$

Podemos ahora reescribir las ecuaciones de las componentes  $x$  y  $y$  para las fuerzas que actúan en el nudo:

$$\begin{aligned} \text{componente } x: \quad -0.866T_A + 0.707T_B &= 0, \\ \text{componente } y: \quad 0.500T_A + 0.707T_B - T_C &= 0. \end{aligned}$$

Sustituyendo el valor para  $T_C$  y resolviendo las dos ecuaciones simultáneamente, hallamos que

$$\begin{aligned} T_A &= 108 \text{ N}, \\ T_B &= 132 \text{ N}. \end{aligned}$$

Compruebe estos resultados (tal como debe hacerse en todos los problemas) para ver si la suma vectorial de las tres fuerzas es en realidad cero.

En el siguiente problema muestra, introducimos otra clase de fuerza, la *fuerza normal*  $N$  ejercida por una superficie sobre un cuerpo. Consideremos el libro que está sobre la mesa que se ilustra en la figura 8. La Tierra ejerce una fuerza hacia abajo sobre el libro (su peso), pero el libro está en equilibrio, de modo que la fuerza total sobre él deberá ser cero. La otra fuerza que actúa sobre el libro es la fuerza normal hacia arriba ejercida por la mesa (indicada como  $F_{BT}$  en la figura 8). En efecto, esta fuerza mantiene al libro sobre la superficie de la mesa. En ausencia de la fricción, las superficies pueden ejercer solamente fuerzas normales, esto es, solamente fuerzas perpendiculares a la superficie. (Nótese que el libro ejerce también una fuerza normal hacia abajo sobre la mesa.)

Si fuésemos a situar nuestra mano sobre el libro y empujáramos hacia abajo con una fuerza  $P$ , el libro permanecería en equilibrio, de modo que la fuerza normal de la mesa sobre el libro aumentaría de acuerdo a ello, siendo en este caso igual a la suma del peso del libro y de la fuerza  $P$ . Si  $P$  fuera suficientemente grande, excederíamos la capacidad de la mesa para proporcionar la fuerza normal hacia arriba, y el libro se rompería contra la cubierta de la mesa.

Las fuerzas de tensión y las fuerzas normales son ejemplos de *fuerzas de contacto*, en las que un cuerpo ejerce

una fuerza sobre otro en virtud del contacto entre ellos. Estas fuerzas se originan en los átomos del cuerpo, los cuales ejercen una fuerza sobre su otro átomo vecino. Las fuerzas de contacto pueden mantenerse solamente si no exceden a las fuerzas interatómicas; de otro modo se rompe la unión entre los átomos, y la cuerda o la superficie se rompe en pedazos.

**Problema muestra 5** Un trineo de masa  $m = 7.5 \text{ kg}$  es jalado a lo largo de una superficie horizontal sin fricción por medio de una cuerda (Fig. 15). Se aplica a la cuerda una fuerza constante de  $P = 21.0 \text{ N}$ . Analice el movimiento si (a) la cuerda está horizontal y si (b) la cuerda forma un ángulo de  $\theta = 15^\circ$  con la horizontal.

**Solución** (a) En la figura 15b se muestra el diagrama del cuerpo libre con la cuerda horizontal. La superficie ejerce una fuerza  $N$ , la fuerza normal, sobre el trineo. Las fuerzas son analizadas en componentes y se emplea la segunda ley de Newton como sigue:

$$\begin{aligned} \text{componente } x: \quad \sum F_x &= P = ma_x, \\ \text{componente } y: \quad \sum F_y &= N - mg = ma_y. \end{aligned}$$

Si no existe un movimiento vertical, el trineo permanecerá sobre la superficie y  $a_y = 0$ . Así,

$$N = mg = (7.5 \text{ kg})(9.80 \text{ m/s}^2) = 74 \text{ N}.$$

La aceleración horizontal es

$$a_x = \frac{P}{m} = \frac{21.0 \text{ N}}{7.5 \text{ kg}} = 2.80 \text{ m/s}^2.$$

Nótese que, si la superficie carece realmente de fricción, como lo hemos supuesto, la persona no puede continuar ejerciendo esta fuerza sobre el trineo por mucho tiempo. Después de 30 s con esta aceleración, el trineo se estaría moviendo a razón de ¡84 m/s o a 188 mi/h!

(b) El diagrama de cuerpo libre cuando la fuerza del jalón no es horizontal se muestra en la figura 15c, y las ecuaciones de las componentes toman entonces las formas siguientes:

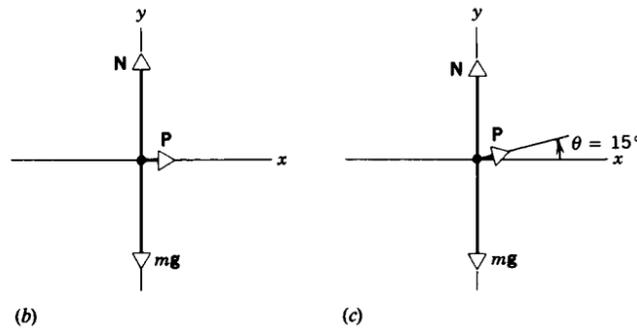
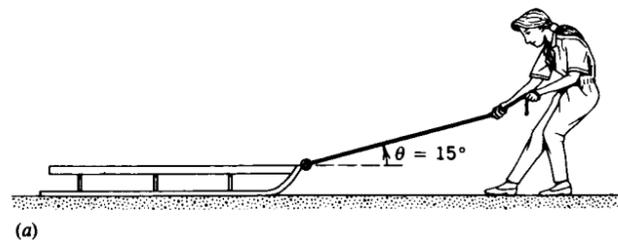
$$\begin{aligned} \text{componente } x: \quad \sum F_x &= P \cos \theta = ma_x, \\ \text{componente } y: \quad \sum F_y &= N + P \sin \theta - mg = ma_y. \end{aligned}$$

Supongamos por el momento que el trineo descansa sobre la superficie; esto es, que  $a_y = 0$ . Entonces

$$N = mg - P \sin \theta = 74 \text{ N} - (21.0 \text{ N})(\sin 15^\circ) = 69 \text{ N},$$

$$a_x = \frac{P \cos \theta}{m} = \frac{(21.0 \text{ N})(\cos 15^\circ)}{7.5 \text{ kg}} = 2.70 \text{ m/s}^2.$$

Una fuerza normal es siempre perpendicular a la superficie de contacto; con las coordenadas elegidas como en la figura 15b,  $N$  debe ser positiva. Si aumentamos  $P$  sen  $\theta$ ,  $N$  disminuirá y en algún punto será cero. En ese punto el trineo abandonaría la superficie bajo la influencia de la componente hacia arriba de  $P$ , y necesitaríamos analizar su movimiento vertical. Con los valores de  $P$  y de  $\theta$  que hemos usado, el trineo permanece sobre la superficie y  $a_y = 0$ .



**Figura 15** Problema muestra 5. (a) Un trineo es jalado a lo largo de una superficie horizontal carente de fricción. (b) El diagrama del cuerpo libre del trineo cuando  $\theta = 0^\circ$ . (c) El diagrama del cuerpo libre del trineo cuando  $\theta = 15^\circ$ .

**Problema muestra 6** Un bloque de masa  $m = 18.0 \text{ kg}$  es mantenido en su lugar por una cuerda sobre un plano carente de fricción inclinado a un ángulo de  $27^\circ$  (véase la Fig. 16a). Halle la tensión en la cuerda y la fuerza normal ejercida sobre el bloque por el plano inclinado. (b) Analice el movimiento siguiente tras haberse cortado la cuerda.

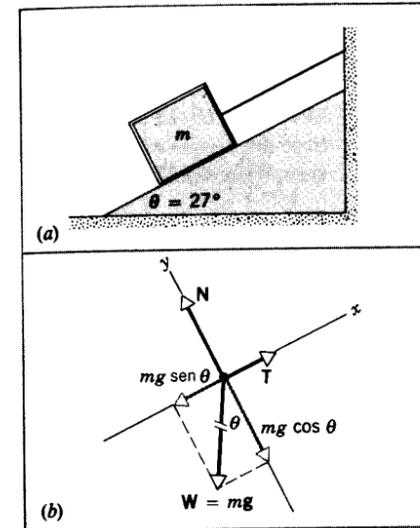
**Solución** (a) En la figura 16b se muestra el diagrama del cuerpo libre del bloque. El bloque es actuado por la fuerza normal  $N$ , por su peso  $W = mg$ , y por la tensión  $T$  de la cuerda. Elegimos un sistema de coordenadas con el eje  $x$  a lo largo del plano inclinado y el eje  $y$  perpendicular al mismo. Con esta elección, dos de las fuerzas ( $T$  y  $N$ ) están ya resueltas en sus componentes, y el movimiento que eventualmente ocurriría a lo largo del plano tiene igualmente una sola componente.

En el caso estático no existe aceleración y las fuerzas deben sumar cero. El peso es resuelto en su componente  $x$  ( $-mg \text{ sen } \theta$ ) y su componente  $y$  ( $-mg \text{ cos } \theta$ ), y las ecuaciones de las fuerzas son las siguientes:

$$\begin{aligned} \text{componente } x: \quad \sum F_x &= T - mg \text{ sen } \theta = ma_x = 0, \\ \text{componente } y: \quad \sum F_y &= N - mg \text{ cos } \theta = ma_y = 0. \end{aligned}$$

Examine estas ecuaciones. ¿Son razonables? ¿Qué sucede en el límite  $\theta = 0^\circ$ ? Parece como si la tensión fuese cero. ¿Esperaría usted que la tensión fuese cero si el bloque estuviera descansando sobre una superficie horizontal? ¿Qué le sucede a la fuerza normal cuando  $\theta = 0^\circ$ ? ¿Es esto razonable? ¿Qué le sucedería a  $T$  y a  $N$  en el límite de  $\theta = 90^\circ$ ? Conviene que adquiera usted el hábito de hacerse preguntas como éstas antes de comenzar con el álgebra para hallar la solución. Si existe un error, ahora es el mejor momento para hallarlo y corregirlo. Resolviendo las ecuaciones,

$$T = mg \text{ sen } \theta = (18.0 \text{ kg})(9.80 \text{ m/s}^2)(\text{sen } 27^\circ) = 80 \text{ N},$$



**Figura 16** Problema muestra 6. (a) Una masa  $m$  se halla suspendida en reposo por una cuerda sobre un plano inclinado carente de fricción. (b) El diagrama del cuerpo libre de  $m$ . Nótese que el sistema de coordenadas  $xy$  está inclinado de modo que el eje  $x$  sea paralelo al plano. El peso  $mg$  ha sido resuelto en sus componentes vectoriales.

$$N = mg \text{ cos } \theta = (18.0 \text{ kg})(9.80 \text{ m/s}^2)(\text{cos } 27^\circ) = 157 \text{ N}.$$

(b) Cuando se corta la cuerda, la tensión desaparece de las ecuaciones y el bloque deja de estar en equilibrio. La segunda ley de Newton nos da ahora lo siguiente:

$$\begin{aligned} \text{componente } x: \quad \sum F_x &= -mg \text{ sen } \theta = ma_x, \\ \text{componente } y: \quad \sum F_y &= N - mg \text{ cos } \theta = ma_y. \end{aligned}$$

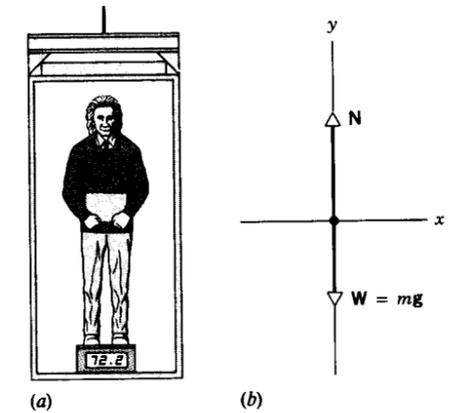
El corte de la cuerda no cambia el movimiento en la dirección  $y$  (¡el bloque no salta del plano!), de manera que  $a_y = 0$  como antes y la fuerza normal es todavía igual a  $mg \text{ cos } \theta$ , ó 157 N. En la dirección  $x$

$$a_x = -g \text{ sen } \theta = -(9.80 \text{ m/s}^2)(\text{sen } 27^\circ) = -4.45 \text{ m/s}^2.$$

El signo menos demuestra que el bloque se acelera en dirección  $x$  negativa, esto es, hacia abajo del plano. Compruebe los límites  $\theta = 0^\circ$  y  $\theta = 90^\circ$ . ¿Coinciden con nuestras expectativas?

**Problema muestra 7** Un pasajero de 72.2 kg de masa está viajando en un elevador mientras permanece de pie sobre una báscula de plataforma (Fig. 17a). ¿Qué indica la báscula cuando la cabina del elevador (a) desciende a velocidad constante y (b) asciende con una aceleración de  $3.20 \text{ m/s}^2$ ?

**Solución** Desarrollemos primero un resultado general válido para cualquier aceleración vertical  $a$ . Elegimos que nuestro marco inercial de referencia esté fuera del elevador (el pozo o tiro del elevador, por ejemplo, que forma parte del edificio), porque un elevador en aceleración no es un marco inercial de referencia. Tanto  $g$  como  $a$  se miden por un observador situado en este marco externo. La figura 17b muestra el diagrama del cuerpo libre del pasajero. Existen la fuerza hacia abajo del peso



**Figura 17** Problema muestra 7. (a) Un pasajero viaja en la cabina de un elevador parado sobre una báscula. (b) El diagrama de cuerpo libre del pasajero. La fuerza normal  $N$  es ejercida por la báscula y es de igual magnitud que la lectura de la báscula. (Las básculas comerciales, como la que aquí se muestra, están calibradas para su lectura en kilogramos, en lugar de en newtons.)

y la fuerza normal hacia arriba ejercida por la báscula. La fuerza normal es ejercida por la báscula sobre el pasajero; la báscula indica la fuerza hacia abajo ejercida por el pasajero sobre la báscula. Según la tercera ley de Newton, éstas son de igual magnitud. Entonces, si podemos hallar la fuerza normal, tendremos la lectura de la báscula.

Del diagrama del cuerpo libre tenemos que

$$\sum F_y = N - mg = ma$$

o sea

$$N = m(g + a).$$

Cuando  $a = 0$ , ya sea que el elevador esté en reposo o moviéndose a velocidad constante, como en la parte (a), entonces

$$N = mg = (72.2 \text{ kg})(9.80 \text{ m/s}^2) = 708 \text{ N} (= 159 \text{ lb}).$$

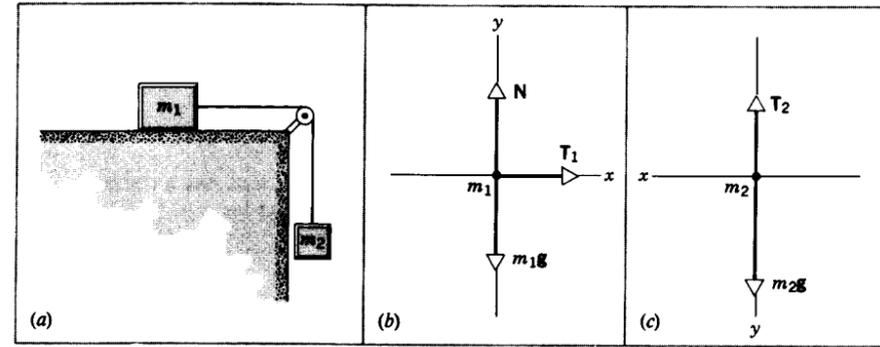
Cuando  $a = 3.20 \text{ m/s}^2$ , como en la parte (b) tenemos que

$$\begin{aligned} N &= m(g + a) = (72.2 \text{ kg})(9.80 \text{ m/s}^2 + 3.20 \text{ m/s}^2) \\ &= 939 \text{ N} (= 211 \text{ lb}). \end{aligned}$$

La lectura de la báscula, que indica la fuerza normal con la que el piso está empujando al pasajero, aumenta cuando el elevador está acelerando hacia arriba ( $a$  es positiva como lo hemos definido por el sistema de coordenadas) y disminuye cuando está acelerando hacia abajo. En caída libre ( $a = -g$ ) la lectura de la báscula será cero (no existe una fuerza normal).

## 5-11 MÁS APLICACIONES DE LAS LEYES DE NEWTON

Aquí consideraremos algunas aplicaciones adicionales de las leyes de Newton. Estos ejemplos implican a varios



**Figura 18** Problema muestra 8. (a) El bloque  $m_1$  es jalado a lo largo de una superficie horizontal por una cuerda que pasa por una polea y está unida al bloque  $m_2$ . (b) El diagrama del cuerpo libre del bloque  $m_1$ . (c) El diagrama del cuerpo libre del bloque  $m_2$ .

objetos que deben ser analizados por separado pero no precisamente en forma independiente, a causa de que el movimiento de un objeto está restringido por el movimiento de otro, tal como cuando están unidos entre sí por medio de una cuerda de longitud fija. Estudie estos ejemplos, y note las elecciones independientes de los sistemas de coordenadas usados para los objetos por separado.

**Problema muestra 8** La figura 18a muestra un bloque de masa  $m_1$  sobre una superficie horizontal sin fricción. El bloque es jalado por una cuerda de masa despreciable que está unida a un bloque colgante de masa  $m_2$ . La cuerda pasa por una polea cuya masa es despreciable y cuyo eje gira con fricción despreciable. Halle la tensión en la cuerda y la aceleración de cada bloque.

**Solución** Este problema difiere de los considerados anteriormente en que están implicados dos objetos, en lugar de uno. Las figuras 18b y 18c muestran los diagramas del cuerpo libre de los objetos por separado. No es necesario elegir el mismo sistema de coordenadas para ambos objetos; en tanto seamos coherentes con cada subsistema, no importa cómo se definan los ejes individuales.

En el bloque 1 actúa una fuerza normal  $N$ , por gravedad, y por la tensión en la cuerda. Puesto que esperamos que el bloque 1 acelere hacia la derecha, lo elegimos para nuestra dirección  $x$  positiva. También esperamos que el bloque 1 permanezca sobre la superficie horizontal, de modo que la componente  $y$  de su aceleración sea cero. Las ecuaciones de las componentes según la segunda ley de Newton son, entonces, las siguientes:

$$\text{componente } x: \quad \sum F_x = T_1 = m_1 a_{1x},$$

$$\text{componente } y: \quad \sum F_y = N - m_1 g = m_1 a_{1y} = 0.$$

Para el bloque 2, elegimos que el eje  $y$  sea vertical hacia abajo, que es la dirección de la aceleración que esperamos. No es necesario considerar componentes  $x$  para el bloque 2, y la componente  $y$  nos dará, según la segunda ley de Newton,

$$\sum F_y = m_2 g - T_2 = m_2 a_{2y}.$$

Consideramos que la cuerda carece de masa, de modo que la fuerza neta sobre ella será cero. Las tensiones  $T_1$  y  $T_2$  ejercidas por la cuerda sobre los bloques resultan en iguales fuerzas de

reacción  $T_1$  y  $T_2$  ejercidas por los bloques sobre la cuerda. Si la cuerda estuviera recta, el anulamiento de la fuerza neta sobre la cuerda requeriría que  $T_1 = T_2$ . La presencia de la polea ideal (sin masa y sin fricción) para cambiar la dirección de la tensión en la cuerda no cambia esta afirmación: la tensión tiene una magnitud común a lo largo de la longitud de la cuerda. Representaremos a la tensión común por la variable única  $T$ .

Si la cuerda es también inextensible (esto es, no se estira), entonces cualquier movimiento del bloque 1 en su dirección  $x$  es igualado exactamente por un movimiento correspondiente del bloque 2 en su dirección  $y$ . En este caso las aceleraciones de los dos bloques son iguales. Llamemos  $a$  a esta aceleración común. Tenemos ahora tres ecuaciones:

$$T = m_1 a,$$

$$N = m_1 g,$$

y

$$m_2 g - T = m_2 a.$$

Resolviendo la primera y la tercera simultáneamente nos da

$$a = \frac{m_2}{m_1 + m_2} g \quad (5)$$

y

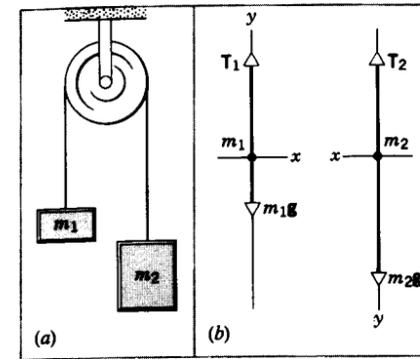
$$T = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} g. \quad (6)$$

Es útil considerar los casos límites de estos resultados. ¿Qué sucede cuando  $m_1$  es cero? Esperaríamos que la cuerda se afloje ( $T = 0$ ) y  $m_2$  caiga libremente ( $a = g$ ). Las ecuaciones predicen correctamente estos límites. Cuando  $m_2 = 0$ , no existe una fuerza horizontal sobre el bloque 1 y no se acelera; de nueva cuenta, las ecuaciones dan la predicción correcta.

Nótese que  $a < g$ , como era de esperarse. También nótese que  $T$  no es igual a  $m_2 g$ . Sólo si el bloque 2 estuviera colgando en equilibrio ( $a = 0$ ) sería  $T = m_2 g$ . Si el bloque 2 acelera hacia abajo, entonces  $T < m_2 g$ ; si acelera hacia arriba, entonces  $T > m_2 g$ .

¿Se comportan las ecuaciones 5 y 6 apropiadamente en el límite  $g = 0$ ?

**Problema muestra 9** Consideremos dos masas distintas desiguales unidas por una cuerda que pasa por una polea ideal (cuya masa es despreciable y cuyos ejes giran con una fricción despreciable), como se muestra en la figura 19. (Este mecanis-



**Figura 19** Problema muestra 9. (a) Diagrama de la máquina de Atwood, que consta de dos masas suspendidas unidas por una cuerda que pasa por una polea. (b) Diagramas del cuerpo libre de  $m_1$  y  $m_2$ .

mo se conoce también como *máquina de Atwood*.\* Sea  $m_2$  mayor que  $m_1$ . Halle la tensión en la cuerda y la aceleración de las masas.

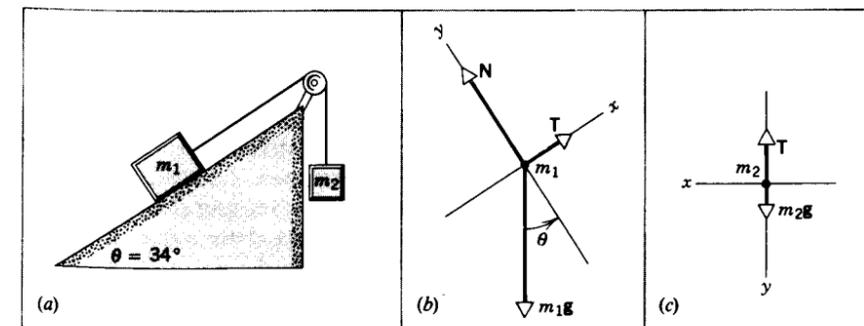
**Solución** A causa de que hemos previsto que las masas tengan sólo aceleraciones verticales, elegimos que la dirección y positiva sea la dirección del movimiento de cada masa. Sólo se necesita considerar a las componentes  $y$ . En la figura 19b se muestran los diagramas del cuerpo libre, y las ecuaciones del movimiento serían las siguientes:

$$\text{bloque 1:} \quad \sum F_y = T_1 - m_1 g = m_1 a_1,$$

$$\text{bloque 2:} \quad \sum F_y = m_2 g - T_2 = m_2 a_2,$$

donde  $a_1$  y  $a_2$  son las aceleraciones de  $m_1$  y  $m_2$ , respectivamente. Como en el ejemplo anterior, si la cuerda carece de masa y no se estira, y si la polea carece de masa y de fricción, entonces  $T_1 = T_2 = T$  y  $a_1 = a_2 = a$ . (Suponemos que esta polea ideal no cambia

\* George Atwood (1745-1807) fue un matemático inglés que desarrolló este dispositivo en 1784 para demostrar las leyes del movimiento acelerado y medir  $g$ . Haciendo a la diferencia entre  $m_1$  y  $m_2$  pequeña, le fue posible "retardar" el efecto de la caída libre y medir el movimiento del peso en caída con un reloj de péndulo, la manera más precisa de medir intervalos de tiempo en aquella época.



**Figura 20** Problema muestra 10. (a) El bloque  $m_1$  se desliza sobre un plano inclinado sin fricción. El bloque  $m_2$  cuelga de una cuerda unida a  $m_1$ . (b) Diagrama del cuerpo libre de  $m_1$ . (c) Diagrama del cuerpo libre de  $m_2$ .

la magnitud de la tensión o de la aceleración de un lado de la cuerda al otro; su única función es cambiar sus direcciones.) Sustituyendo y resolviendo las dos ecuaciones simultáneamente, hallamos que

$$a = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} g, \quad (7)$$

$$T = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} g. \quad (8)$$

Consideremos qué sucede en los casos límite  $m_1 = 0$ ,  $m_2 = 0$ ,  $g = 0$ , y  $m_1 = m_2$ . Nótese que  $m_1 g < T < m_2 g$ , y asegúrese de que ha entendido por qué esto debe de ser así.

**Problema muestra 10** Consideremos el sistema mecánico mostrado en la figura 20a, donde  $m_1 = 9.5$  kg,  $m_2 = 2.6$  kg, y  $\theta = 34^\circ$ . El sistema ha salido del reposo. Describa el movimiento.

**Solución** En las figuras 20b y 20c se muestran los diagramas del cuerpo libre para los bloques 1 y 2. Elegimos los sistemas de coordenadas como se muestra, de modo que un sistema de coordenadas sea paralelo a la aceleración prevista para cada cuerpo. Como en los ejemplos anteriores, esperamos que la tensión tenga un valor común y que el movimiento vertical de  $m_2$  y el movimiento a lo largo del plano de  $m_1$  pueda ser descrito por aceleraciones de la misma magnitud. Supongamos que  $m_1$  se mueve en la dirección  $x$  positiva (si nuestra hipótesis es errónea,  $a$  resultará negativa). Para  $m_1$ , las ecuaciones de las componentes, según la segunda ley de Newton, son las siguientes:

$$\text{componente } x: \quad \sum F_x = T - m_1 g \sin \theta = m_1 a,$$

$$\text{componente } y: \quad \sum F_y = N - m_1 g \cos \theta = 0,$$

y para  $m_2$ ,

$$\sum F_y = m_2 g - T = m_2 a.$$

Resolviendo simultáneamente tenemos que

$$a = \frac{m_2 - m_1 \sin \theta}{m_1 + m_2} g \quad (9)$$

y

$$T = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} g (1 + \sin \theta). \quad (10)$$

Nótese que estos resultados duplican las ecuaciones 5 y 6 del problema muestra 8 si ponemos que  $\theta = 0$  (de modo que el

bloque 1 se mueva horizontalmente) y las Ecs. 7 y 8 del problema muestra 9 si hacemos que  $\theta = 90^\circ$  (de modo que el bloque 1 se mueva verticalmente).

Poniéndolo en números, tenemos que

$$a = \frac{2.6 \text{ kg} - (9.5 \text{ kg})(\text{sen } 34^\circ)}{9.5 \text{ kg} + 2.6 \text{ kg}} (9.80 \text{ m/s}^2) = -2.2 \text{ m/s}^2.$$

La aceleración resulta ser negativa, lo que significa que nuestra estimación inicial con respecto a la dirección del movimiento era errónea. El bloque 1 se desliza hacia abajo por el plano, y el bloque 2 se mueve hacia arriba. A causa de que en las ecuaciones dinámicas no intervienen fuerzas que dependan de

la dirección del movimiento, esta estimación inicial incorrecta no tiene efecto sobre las ecuaciones y podemos aceptar el valor final como correcto. En general, éste no será el caso si consideramos fuerzas de fricción que actúen en oposición a la dirección del movimiento.

Para la tensión en la cuerda, hallamos que

$$T = \frac{(9.5 \text{ kg})(2.6 \text{ kg})}{9.5 \text{ kg} + 2.6 \text{ kg}} (9.80 \text{ m/s}^2)(1 + \text{sen } 34^\circ) = 31 \text{ N}.$$

Este valor es mayor que el peso de  $m_2$  ( $m_2g = 26 \text{ N}$ ), lo cual es compatible con la aceleración de  $m_2$ , que es hacia arriba.

### PREGUNTAS

- ¿Por qué caemos hacia adelante cuando un autobús en movimiento desacelera hasta detenerse y sentimos un impulso hacia atrás cuando acelera desde el reposo? Las personas que viajan de pie en el metro hallan a menudo conveniente situarse de frente al costado del carro cuando el tren arranca o se detiene y viendo hacia el frente o la parte trasera cuando el tren está corriendo a velocidad constante. ¿Por qué?
- Un bloque de masa  $m$  está suspendido del techo por un cordón  $C$ , y un cordón similar  $D$  está atado a la base del bloque (Fig. 21). Explique lo siguiente: Si le damos un tirón súbito a  $D$ , se romperá, pero si jalamos uniformemente de  $D$ ,  $C$  se romperá.

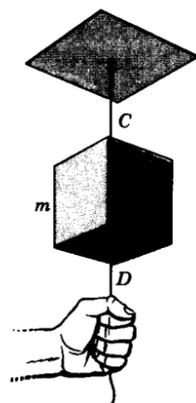


Figura 21 Pregunta 2.

- Rebata la afirmación, hecha a menudo, de que la masa de un cuerpo es una medida de la "cantidad de materia" que contiene.
- Usando fuerza, longitud, y tiempo como cantidades fundamentales, ¿cuáles son las dimensiones de masa?

- ¿Puede ser considerada la primera ley de Newton simplemente como el caso especial  $a = 0$  de la segunda ley? De ser así, ¿es realmente necesaria la primera ley? Discuta esto.
- ¿Qué relación existe, si la hay, entre la fuerza que actúa sobre un objeto y la dirección en la que se mueve el objeto?
- Suponga que un cuerpo sobre el que actúen exactamente dos fuerzas se acelera. ¿Se deduce entonces que (a) el cuerpo no podrá moverse a velocidad constante; (b) la velocidad nunca podrá ser cero; (c) la suma de las dos fuerzas no puede ser cero; (d) las dos fuerzas deben actuar en la misma línea?
- En la figura 22 mostramos cuatro fuerzas que son de igual magnitud. ¿Qué combinación de tres de ellas, actuando juntas sobre la misma partícula, podría mantener a esa partícula en equilibrio?

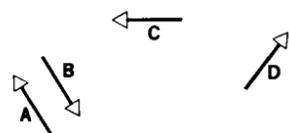


Figura 22 Pregunta 8.

- Un caballo es obligado a jalar una carreta. El caballo se niega a ello, apelando a la tercera ley de Newton como defensa: el jalón del caballo sobre la carreta es igual pero opuesto al jalón de la carreta sobre el caballo. Se pregunta el caballo: "Si yo no puedo nunca ejercer una fuerza mayor sobre la carreta de la que ésta ejerce sobre mí, ¿cómo puedo hacer que la carreta se mueva?" ¿Qué le contestaría usted?
- Comente si los siguientes pares de fuerzas son ejemplos de acción-reacción: (a) La Tierra atrae a un ladrillo; el

ladrillo atrae a la Tierra. (b) Un aeroplano a hélice empuja el aire hacia la cola; el aire empuja al aeroplano hacia adelante. (c) Un caballo jala de una carreta, moviéndola; la carreta jala contra el caballo. (d) Un caballo jala de una carreta sin moverla; la carreta jala contra el caballo. (e) Un caballo jala de una carreta sin moverla; la Tierra ejerce una fuerza igual y opuesta sobre la carreta. (f) La Tierra jala a la carreta hacia abajo; el suelo empuja a la carreta hacia arriba con una fuerza igual y opuesta.

- La siguiente aseveración es verdadera: explíquela. Dos equipos están conteniendo jalando de una cuerda; el equipo que empuje más duro (horizontalmente) contra el suelo gana.
- Dos estudiantes tratan de romper una cuerda. Primero jalan uno contra el otro y fallan. Luego atan un extremo a una pared y jalan juntos. ¿Es éste procedimiento mejor que el primero? Explique su respuesta.
- ¿Cuál es su masa en "slugs"? ¿Y su peso en newtons?
- Un francés, al llenar un formulario, escribe "78 kg" en el espacio marcado Poids (peso). Sin embargo, el peso es una fuerza y el kilogramo es una unidad de masa. ¿Qué tienen los franceses (entre otros) en cuenta cuando usan unidades de masa para describir su peso? ¿Por qué no da su peso en newtons? ¿Cuántos newtons pesa el francés? ¿Y cuántas libras?
- Comente las aseveraciones siguientes con respecto a masa y peso hechas en hojas de examen. (a) La masa y el peso son las mismas cantidades físicas expresadas en unidades diferentes. (b) La masa es una propiedad de un objeto aislado, mientras que el peso resulta de la interacción de dos objetos. (c) El peso de un objeto es proporcional a su masa. (d) La masa de un cuerpo varía con los cambios en su peso local.
- Una fuerza horizontal actúa sobre un cuerpo que puede moverse libremente. ¿Puede producir una aceleración si la fuerza es menor que el peso de ese cuerpo?
- ¿Por qué la aceleración de un objeto que cae libremente no depende del peso del objeto?
- Describa varias maneras en las que usted podría, aun brevemente, experimentar una carencia de peso.
- ¿En qué circunstancias sería cero su peso? ¿Depende su respuesta de la elección de un sistema de referencia?
- El "brazo mecánico" de un vehículo espacial puede manejar un satélite de 2200 kg cuando se le extiende a 12 m (véase la Fig. 23). Sin embargo, en la Tierra, este sistema manipulador remoto (RMS) no puede soportar su propio peso. En la "ingravedez" de un vehículo espacial en órbita, ¿por qué ese sistema manipulador remoto tiene que poder ejercer una fuerza?
- El manual del propietario de un automóvil sugiere que el cinturón de seguridad se ajuste perfectamente y que la almohadilla del asiento frontal *no sea* acomodada sobre la nuca sino de modo tal que "la parte superior de la almohadilla esté a nivel con la parte superior de las orejas". ¿Cómo apoyan las leyes de Newton a estas buenas recomendaciones?
- Usted dispara una flecha al aire y la sigue con la vista a lo largo de una trayectoria parabólica hasta el suelo. Se da



Figura 23 Preguntas 20 y 26.

- cuanta de que la flecha viaja de modo que siempre es tangente a su trayectoria. ¿Qué es lo que lo causa?
- En una contienda para jalar de una cuerda tres hombres jalan de ella a la izquierda  $A$  y otros tres jalan a la derecha  $B$  con fuerzas de igual magnitud. Ahora se cuelga una pesa de 5 lb verticalmente en el centro de la cuerda. (a) ¿Pueden los hombres hacer que  $AB$  sea una horizontal? (b) De no ser así, explíque. Si pueden hacerlo, determine la magnitud de las fuerzas requeridas en  $A$  y en  $B$  para ello.
  - Un pájaro se posa sobre un alambre de telégrafo estirado. ¿Cambia por ello la tensión del alambre? De ser así, ¿en qué cantidad menor, igual, o mayor que el peso del pájaro?
  - Un cable sin masa pasa por una polea carente de fricción. Un chango se cuelga de un lado del cable y en el otro lado del cable hay un espejo colgado, que tiene el mismo peso que el chango y está situado a su mismo nivel. Puede el chango huir de su imagen en el espejo (a) trepando por el cable, (b) bajando por el cable, o (c) soltando el cable?
  - En noviembre de 1984 los astronautas Joe Allen y Dale Gardner recuperaron un satélite de comunicaciones Westar-6 de una órbita defectuosa y lo situaron dentro de la cabina de carga del vehículo espacial *Discovery* (véase la Fig. 23). Al describir la experiencia, Joe Allen dijo del satélite, "no es pesado; es masivo". ¿Qué quiso decir?
  - Usted es un astronauta que está en el salón de descanso de una estación espacial en órbita y quita la tapa de un tarro largo y delgado que contiene una sola aceituna. Describa diversas maneras (todas aprovechando la inercia ya sea de la aceituna o del tarro) para sacar la aceituna del tarro.
  - En la figura 24, una aguja ha sido colocada en cada extremo de un palo de escoba (descansando), las puntas de las agujas se apoyan en los bordes de unas copas llenas de vino. La persona golpea el palo de escoba con una barra mediante un golpe rápido y vigoroso. El palo de escoba se rompe y cae al suelo, pero las copas de vino permanecen en su lugar y no se derrama ni una gota de vino. Esta impresionante habilidad fue popular a finales del siglo pasado. ¿Qué razones físicas están detrás de ella? (Si usted trata de hacerlo, practique primero con latas de refresco vacías. Pensándolo bien, usted podría pedir a su profesor de física que haga el experimento, ¡a modo de demostración para la clase!)

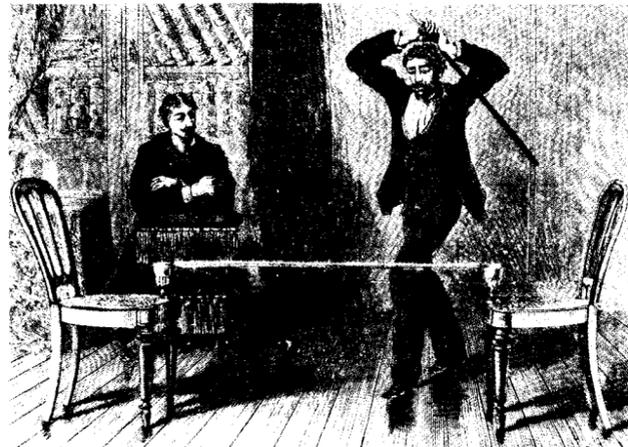


Figura 24 Pregunta 28.



Figura 25 Preguntas 36 y 37.

29. Un elevador está suspendido de un solo cable. No existe un contrapeso. El elevador recibe pasajeros en la planta baja y los lleva hasta el último piso, donde ellos se bajan. Otro grupo de pasajeros entra y son transportados hasta la planta baja. Durante este viaje redondo, ¿cuándo es la tensión del cable igual al peso del elevador más los pasajeros? ¿Cuándo es mayor? ¿Y cuándo menor?
30. Usted está en la plataforma de mando del taxi espacial *Discovery* en órbita y alguien le pasa dos bolas de madera, aparentemente idénticas. Una, sin embargo, tiene un núcleo de plomo y la otra no. Describa varias maneras de distinguirlas.
31. Usted está parado en la plataforma de una báscula grande de resorte y observa su peso. Después avanza un paso sobre la plataforma y observa que en la báscula señala menos de su peso al principio del paso y más de su peso al final del paso. Explique.
32. ¿Podría usted pesarse a sí mismo en un báscula cuya lectura máxima sea menor al peso de usted? Si puede hacerlo, ¿cómo?
33. Una pesa está colgada del techo de un elevador por un cordón. Partiendo de las siguientes condiciones, elija aquella en la cual la tensión del cordón sea mayor . . . o menor: (a) el elevador está en reposo; (b) el elevador sube a velocidad uniforme; (c) el elevador desciende a velocidad decreciente; (d) el elevador desciende a velocidad creciente.
34. Una mujer está de pie sobre una báscula de resortes en un elevador. ¿En cuál de los siguientes casos registraría la

- báscula una lectura mínima . . . o una lectura máxima?: (a) el elevador está quieto; (b) el cable del elevador se rompe; (c) el elevador acelera hacia arriba; (d) el elevador acelera hacia abajo; (e) el elevador se mueve a velocidad constante.
35. ¿A qué conclusión podría llegar un físico si dentro de un elevador permanecen en equilibrio dos masas distintas desiguales que cuelgan de una polea, esto es, no existe una tendencia de la polea a girar?
36. La figura 25 muestra al cometa Kohoutek tal como se le vio en 1973. Como todos los cometas, se mueve alrededor del Sol bajo la influencia de la fuerza de gravitación que el Sol ejerce sobre él. El núcleo del cometa es un núcleo relativamente masivo en una posición indicada por P. La cauda de un cometa se produce por la acción del viento solar, que consta de partículas cargadas que se extienden alejándose del Sol. Por inspección, ¿qué podría usted decir, si existe algo que lo aumente, con respecto a la dirección de la fuerza que actúa sobre el núcleo del cometa? ¿Qué nos diría acerca de la dirección en la que el núcleo es acelerado? ¿Qué acerca de la dirección en la que se está moviendo el cometa?
37. En general (véase la Fig. 25), los cometas tienen una cauda de polvo, que consiste en partículas de polvo impulsadas lejos del Sol por la presión de la luz del astro rey. ¿Por qué esta cauda tiene a menudo una forma curvada?
38. ¿Puede usted pensar en un fenómeno físico que involucre a la Tierra en el cual nuestro planeta no pueda ser tratado como una partícula?

2. Un bloque de 5.5 kg está inicialmente en reposo sobre una superficie horizontal sin fricción. Es jalado con una fuerza horizontal constante de 3.8 N. (a) ¿Cuál es su aceleración? (b) ¿Cuánto tiempo debe ser jalado antes de que su velocidad sea de 5.2 m/s? (c) ¿Cuánto se aleja en este tiempo?
3. Un electrón viaja en línea recta desde el cátodo de un tubo de vacío hasta su ánodo, que está a 1.5 cm de distancia. Comienza con velocidad cero y llega al ánodo con una velocidad de  $5.8 \times 10^6$  m/s. (a) Suponga constante a la aceleración y calcule la fuerza sobre el electrón. La masa del electrón es de  $9.11 \times 10^{-31}$  kg. Esta fuerza es de origen eléctrico. (b) Calcule la fuerza de gravitación sobre el electrón.
4. Un neutrón viaja a una velocidad de  $1.4 \times 10^7$  m/s. Las fuerzas nucleares son de un alcance muy corto, siendo esencialmente cero afuera del núcleo pero muy fuertes adentro. Si el neutrón es capturado y traído al reposo por un núcleo cuyo diámetro es de  $1.0 \times 10^{-14}$  m, ¿cuál es la magnitud mínima de la fuerza, que se presume es constante, que actúa sobre este neutrón? La masa del neutrón es de  $1.67 \times 10^{-27}$  kg.
5. En un juego de "jalar de la cuerda" modificado, dos personas jalan en direcciones opuestas, no de la cuerda, sino de un trineo de 25 kg que descansa sobre una calle cubierta de hielo. Si los participantes ejercen fuerzas de 90 N y 92 N, ¿Cuál es la aceleración del trineo?
6. El haz de luz de láser en un satélite golpea un objeto lanzado desde un proyectil balístico disparado accidentalmente (véase la Fig. 26). El haz ejerce una fuerza de  $2.7 \times 10^{-5}$  N sobre el objetivo. Si el "tiempo de permanencia" del rayo sobre el objetivo es de 2.4 s, ¿en cuánto se desplazará el objeto si éste es (a) una cabeza explosiva de 280 kg y (b) un señuelo de 2.1 kg? (Estos desplazamientos pueden medirse observando el rayo reflejado.)

9. El yate solar *Diana*, diseñado para navegar en el sistema solar usando la presión de la luz del Sol, tiene una vela con un área de 3.1 km<sup>2</sup> y una masa de 930 kg. Cerca de la órbita de la Tierra, el Sol puede ejercer una fuerza de radiación de 29 N sobre la vela. (a) ¿Cuál es la aceleración que tal fuerza impartiría al vehículo? (b) Una aceleración pequeña puede producir efectos grandes si actúa continuamente durante un periodo de tiempo suficientemente grande. Partiendo del reposo, ¿qué tan lejos se habría movido el vehículo después de 1 día en estas condiciones? (c) ¿Cuál sería entonces su velocidad? (Véase "The Wind from the Sun", un fascinante relato de ciencia-ficción por Arthur C. Clarke, sobre una carrera de yates solares.)
10. Un cuerpo de masa *m* recibe la acción de dos fuerzas **F**<sub>1</sub> y **F**<sub>2</sub> como se muestra en la figura 27. Si *m* = 5.2 kg, **F**<sub>1</sub> = 3.7 N, y **F**<sub>2</sub> = 4.3 N, halle el vector de aceleración del cuerpo.

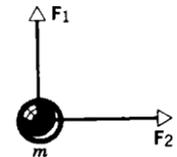


Figura 27 Problema 10.

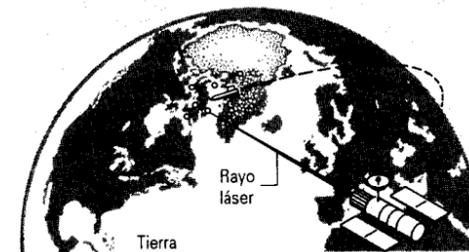


Figura 26 Problema 6.

**PROBLEMAS**

*Sección 5-5 Segunda ley de Newton*

1. Supongamos que la fuerza de gravedad del Sol cesara súbitamente, de modo que la Tierra resultara ser un objeto

libre en lugar de estar confinada a la órbita del Sol. ¿Cuánto tiempo le tomaría a la Tierra llegar a una distancia del Sol igual al radio orbital actual de Plutón? (*Sugerencia:* En el apéndice C el lector encontrará datos necesarios.)

7. Un automóvil que viaja a razón de 53 km/h choca contra el pilar de un puente. Un pasajero que viaja en el automóvil se mueve hacia adelante una distancia de 65 cm (con respecto a la carretera) mientras es llevado al reposo por un cojín de aire inflado. ¿Qué fuerza (supuesta como constante) actúa sobre la parte superior del torso del pasajero, quien tiene una masa de 39 kg?
8. Un electrón es proyectado horizontalmente a una velocidad de  $1.2 \times 10^7$  m/s dentro de un campo eléctrico que

*Sección 5-6 Tercera ley de Newton*

14. Dos bloques, con masas *m*<sub>1</sub> = 4.6 kg y *m*<sub>2</sub> = 3.8 kg, están unidos por un resorte ligero sobre una mesa horizontal sin fricción. En cierto instante, cuando *m*<sub>2</sub> tiene una aceleración *a*<sub>2</sub> = 2.6 m/s<sup>2</sup>. (a) ¿Cuál es la fuerza sobre *m*<sub>2</sub> y (b) ¿cuál es la aceleración de *m*<sub>1</sub>?

15. Una niña de 40 kg y un trineo de 8.4 kg están sobre la superficie de un lago congelado, separados uno del otro por una distancia de 15 m. Por medio de una cuerda, la niña ejerce una fuerza de 5.2 N sobre el trineo, jalándolo hacia ella. (a) ¿Cuál es la aceleración del trineo? (b) ¿Cuál es la aceleración de la niña? (c) ¿A qué distancia de la posición inicial de la niña se encontrarán, suponiendo que la fuerza permanezca constante? Suponga que no actúan fuerzas de fricción.

Sección 5-8 Peso y masa

16. ¿Cuál será el peso en newton y la masa en kilogramos de (a) un saquito de azúcar de 5.00 lb, (b) un jugador de fútbol de 240 lb, y (c) un automóvil de 1.8 tons? (1 ton = 2000 lb).
17. ¿Cuáles son la masa y el peso de (a) un vehículo para nieve de 1420 lb, y (b) una bomba de calor de 412 kg?
18. Un viajero del espacio cuya masa es de 75.0 kg abandona la Tierra. Calcule su peso (a) en la Tierra, (b) en Marte, donde  $g = 3.72 \text{ m/s}^2$ , y (c) en el espacio interplanetario. (d) ¿Cuál es su masa en cada uno de estos lugares?
19. Una cierta partícula tiene un peso de 26.0 N en un punto en donde la aceleración debida a la gravedad es de  $9.80 \text{ m/s}^2$ . (a) ¿Cuáles son el peso y la masa de la partícula en un punto en que la aceleración debida a la gravedad es de  $4.60 \text{ m/s}^2$ ? (b) ¿Cuáles son el peso y la masa de la partícula si se mueve hacia un punto en el espacio donde la fuerza de la gravitación es de cero?
20. Un aeroplano de 12,000 kg está volando a nivel con una velocidad de 870 km/h. ¿Cuál es la fuerza de sustentación dirigida hacia arriba que ejerce el aire sobre el aeroplano?
21. ¿Cuál es la fuerza neta que actúa sobre un automóvil de 3900 lb que acelera a razón de  $13 \text{ ft/s}^2$ ?
22. Un trineo-cohete experimental de 523 kg puede ser acelerado desde el reposo hasta 1620 km/h en 1.82 s. ¿Cuál es la fuerza neta requerida?
23. Un avión de propulsión a chorro parte desde el reposo cuando está sobre la pista y acelera para el despegue a razón de  $2.30 \text{ m/s}^2$  ( $= 7.55 \text{ ft/s}^2$ ). Tiene dos motores, cada uno de los cuales ejerce un empuje de  $1.40 \times 10^5 \text{ N}$  ( $= 15.7 \text{ tons}$ ). ¿Cuál es el peso del avión?

Sección 5-10 Aplicaciones de las leyes de Newton

24. (a) Dos pesas de 10 lb están unidas a una báscula de resorte como se muestra en la figura 28a. ¿Cuánto señala la báscula? (b) Una sola pesa de 10 lb está unida a una báscula de resorte la que a su vez está unida a una pared, como se muestra en la figura 28b. ¿Cuánto señala la báscula? (Desprecie el peso de la báscula.)
25. Una esfera cargada de  $2.8 \times 10^{-4} \text{ kg}$  de masa está suspendida de una cuerda. Una fuerza eléctrica actúa horizontalmente sobre la esfera de modo que la cuerda forme un ángulo de  $33^\circ$  con la vertical cuando está en reposo. Halle (a) la magnitud de la fuerza eléctrica, y (b) la tensión en la cuerda.
26. Un automóvil que se mueve inicialmente a una velocidad de 50 mi/h ( $\approx 80 \text{ km/h}$ ) y que pesa 3000 lb ( $\approx 13,000 \text{ N}$ ) es detenido a una distancia de 200 ft ( $\approx 61 \text{ m}$ ). Halle (a) la fuerza de frenado y (b) el tiempo requerido para que se

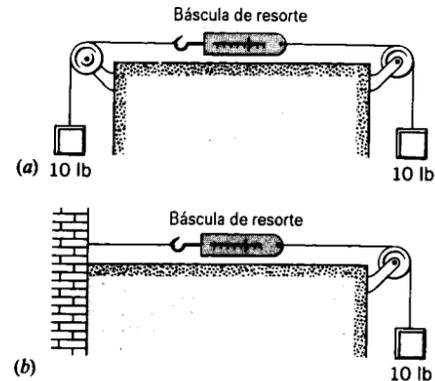


Figura 28 Problema 24.

- detenga. Suponiendo la misma fuerza de frenado, halle (c) la distancia y (d) el tiempo requerido para que se detenga si el automóvil estuviera viajando a razón de 25 mi/h ( $\approx 40 \text{ km/h}$ ) inicialmente.
27. Un meteorito de 0.25 kg de masa cae verticalmente a través de la atmósfera de la Tierra con una aceleración de  $9.2 \text{ m/s}^2$ . Además de la gravedad, una fuerza retardante vertical (debida a la resistencia aerodinámica de la atmósfera) actúa sobre el meteorito. ¿Cuál es la magnitud de esta fuerza retardante? Véase la figura 29.

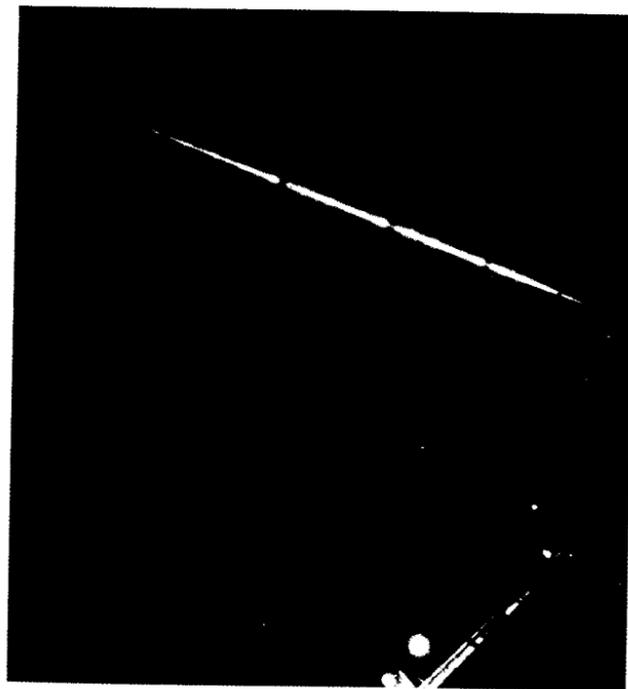


Figura 29 Problema 27.

28. Un elevador que pesa 6200 lb se eleva mediante un cable con una aceleración de  $3.8 \text{ ft/s}^2$ . (a) ¿Cuál es la tensión en el cable? (b) ¿Cuál es la tensión cuando el elevador está

acelerando hacia abajo a razón de  $3.8 \text{ ft/s}^2$  pero se mueve todavía hacia arriba?

29. Un hombre de 83 kg de masa (peso  $mg = 180 \text{ lb}$ ) salta a un patio de concreto desde el borde de una ventana situada a sólo 0.48 m ( $= 1.6 \text{ ft}$ ) sobre el suelo, pero descuida doblar sus rodillas cuando aterriza, de modo que su movimiento es detenido en una distancia de alrededor de 2.2 in ( $= 0.87 \text{ pulg}$ ). (a) ¿Cuál es la aceleración promedio del hombre desde el momento en que sus pies tocan por primera vez el patio hasta el momento en que llega al reposo? (b) ¿Con qué fuerza promedio sacude a su estructura ósea este salto?
30. Un bloque es proyectado hacia arriba sobre un plano inclinado sin fricción a una velocidad  $v_0$ . El ángulo de inclinación es  $\theta$ . (a) ¿Cuánto avanza sobre el plano? (b) ¿Cuánto tiempo le toma llegar hasta allí? (c) ¿Cuál es su velocidad cuando regresa hasta la base? Halle las respuestas numéricas para  $\theta = 35^\circ$  y  $v_0 = 8.2 \text{ ft/s}$ .
31. Una lámpara cuelga verticalmente de un cordón en un elevador en descenso. El elevador tiene una desaceleración de  $2.4 \text{ m/s}^2$  ( $= 7.9 \text{ ft/s}^2$ ) antes de detenerse. (a) Si la tensión en el cordón es de 89 N ( $= 20 \text{ lb}$ ), ¿cuál es la masa de la lámpara? (b) ¿Cuál es la tensión en la cuerda cuando el elevador asciende con una aceleración de  $2.4 \text{ m/s}^2$  ( $= 7.9 \text{ ft/s}^2$ )?
32. ¿Cuánta fuerza se necesita en el sedal para detener a un salmón de 19 lb que nada a razón de  $9.2 \text{ ft/s}$  en una distancia de 4.5 in?
33. Un bloque de 5.1 kg de peso es jalado a lo largo de un piso sin fricción por una cuerda que ejerce una fuerza  $P = 12 \text{ N}$  con un ángulo  $\theta = 25^\circ$  sobre la horizontal, como se muestra en la figura 30. (a) ¿Cuál es la aceleración del bloque? (b) La fuerza  $P$  se incrementa lentamente. ¿Cuál es el valor de  $P$  en el momento antes de que el bloque sea levantado del piso? (c) ¿Cuál es la aceleración del bloque antes de que sea levantado del piso?

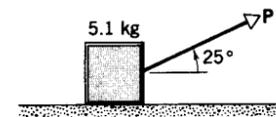


Figura 30 Problema 33.

34. ¿Cómo podría un objeto de 100 lb ser bajado de un tejado usando una cuerda con una resistencia a la rotura de 87 lb sin que se rompa la cuerda?
35. Se deja caer un bloque desde el reposo en la parte superior de un plano inclinado sin fricción de 16 m de longitud. Llega a la base 4.2 s más tarde. Un segundo bloque es lanzado hacia arriba desde el fondo del plano en el instante en que el primer bloque es soltado de modo tal que regresa al fondo simultáneamente con el primer bloque. (a) Halle la aceleración de cada bloque sobre el plano inclinado. (b) ¿Cuál es la velocidad inicial del segundo bloque? (c) ¿Qué distancia recorre hacia arriba en el plano inclinado? (d) ¿Qué ángulo forma el plano con la horizontal?

36. Un obrero arrastra una caja por el piso de una fábrica jalando de una cuerda atada a la caja. El obrero ejerce una fuerza de 450 N sobre la cuerda, la cual está inclinada a  $38.0^\circ$  sobre la horizontal. El suelo ejerce una fuerza resistiva horizontal de 125 N, como se muestra en la figura 31. Calcule la aceleración de la caja (a) si su masa es de 96.0 kg y (b) si su peso es de 96.0 N.

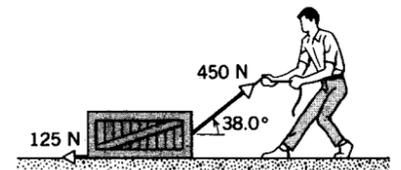


Figura 31 Problema 36.

37. Un elevador y su carga tienen una masa combinada de 1600 kg. Halle la tensión en el cable de sustentación cuando el elevador, que originalmente se mueve hacia abajo a razón de 12.0 m/s, es traído al reposo con aceleración constante a una distancia de 42.0 m.
38. Un objeto cuelga de una balanza de resortes unida al techo de un elevador. La balanza señala 65 N cuando el elevador está quieto. (a) ¿Cuánto marca cuando el elevador se mueve hacia arriba a una velocidad constante de 7.6 m/s? (b) ¿Cuánto marca la balanza cuando el elevador se mueve hacia arriba a una velocidad de 7.6 m/s y desacelera a razón de  $2.4 \text{ m/s}^2$ ?
39. Una plomada, que consta de una pequeña pesa suspendida por un cordón de masa despreciable, cuelga del techo de un vagón de ferrocarril y actúa como un acelerómetro. (a) Demuestre que la expresión que relaciona a la aceleración horizontal  $a$  del carro con el ángulo  $\theta$  formado por el cordón con la vertical está dada por  $a = g \tan \theta$ . (b) Halle  $a$  cuando  $\theta = 20^\circ$ . (c) Halle  $\theta$  cuando  $a = 5.0 \text{ ft/s}^2$ .
40. Un motor a chorro de 1400 kg está afianzado al fuselaje de un avión de pasajeros por apenas tres pernos (que suele ser la práctica usual). Suponga que cada perno soporta un tercio de la carga. (a) Calcule la fuerza sobre cada perno cuando el avión espera en línea para que se le permita el despegue. (b) Durante el vuelo, el avión encuentra turbulencia, la cual imparte súbitamente al avión una aceleración vertical hacia arriba de  $2.60 \text{ m/s}^2$ . Calcule la fuerza sobre cada perno ahora. ¿Por qué se usan solamente tres pernos? Véase la figura 32.
41. Unos obreros están cargando un equipo en un elevador de carga en el último piso de un edificio. Sin embargo, sobrecargan el elevador y el cable desgastado se rompe violentamente. La masa del elevador cargado en el momento del accidente es de 1600 kg. Cuando el elevador cae, los rieles de guía ejercen una fuerza retardante constante de 3700 N sobre el elevador. ¿A qué velocidad golpea el elevador el fondo del tiro situado a 72 m hacia abajo?
42. Un automóvil de 1200 kg está siendo arrastrado por un plano inclinado a  $18^\circ$  por medio de un cable atado a la

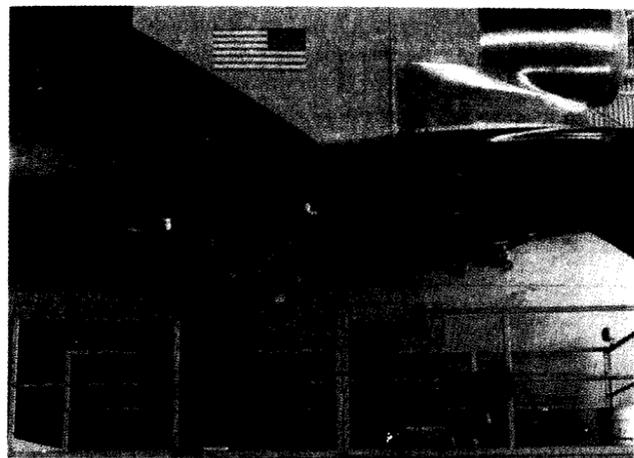


Figura 32 Problema 40.

parte trasera de un camión-grúa. El cable forma un ángulo de  $27^\circ$  con el plano inclinado. ¿Cuál es la mayor distancia que el automóvil puede ser arrastrado en los primeros 7.5 s después de arrancar desde el reposo si el cable tiene una resistencia a la rotura de 4.6 kN? Desprecie todas las fuerzas resistivas sobre el automóvil. Véase la figura 33.

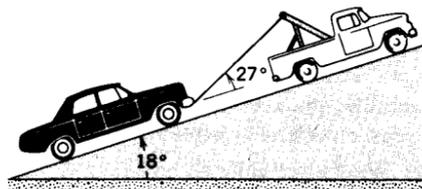


Figura 33 Problema 42.

43. Una caja de 110 kg está siendo empujada a velocidad constante por la rampa de  $34^\circ$  que se muestra en la figura 34. (a) ¿Qué fuerza horizontal  $F$  se requiere? (b) ¿Cuál es la fuerza ejercida por la rampa sobre la caja?

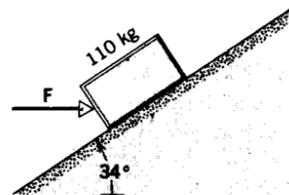


Figura 34 Problema 43.

44. Un reciente avión a chorro de 26 tons de la fuerza aérea de Estados Unidos (Fig. 35) requiere una velocidad en el aire de 280 ft/s para el despegue. Su propio motor desa-

rolla un empuje de 24,000 lb. El avión va a despegar desde un portaviones con una pista de vuelo de 300 ft. ¿Qué fuerza debe ser ejercida por la catapulta del portaviones? Suponga que la catapulta y el motor del avión ejercen una fuerza constante a lo largo de los 300 ft del despegue.

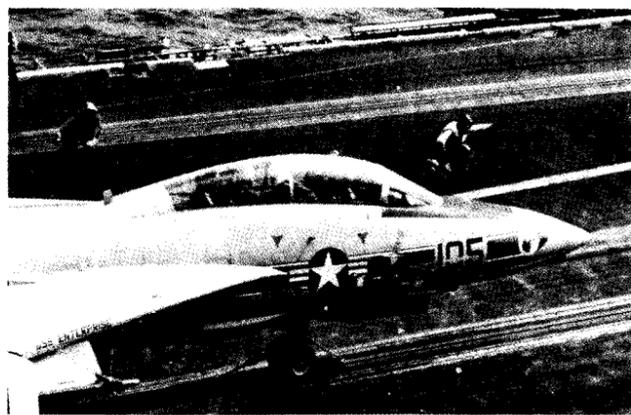


Figura 35 Problema 44.

45. Una nave de descenso se aproxima a la superficie de Calisto, uno de los satélites (lunas) del planeta Júpiter (Fig. 36). Si el motor de la nave proporciona un empuje hacia arriba de 3260 N, la nave desciende a velocidad constante. Calisto no tiene atmósfera. Si el empuje hacia arriba es de 2200 N, la nave acelera hacia abajo a razón de  $0.390 \text{ m/s}^2$ . (a) ¿Cuál es el peso de la nave en descenso en la vecindad de la superficie de Calisto? (b) ¿Cuál es

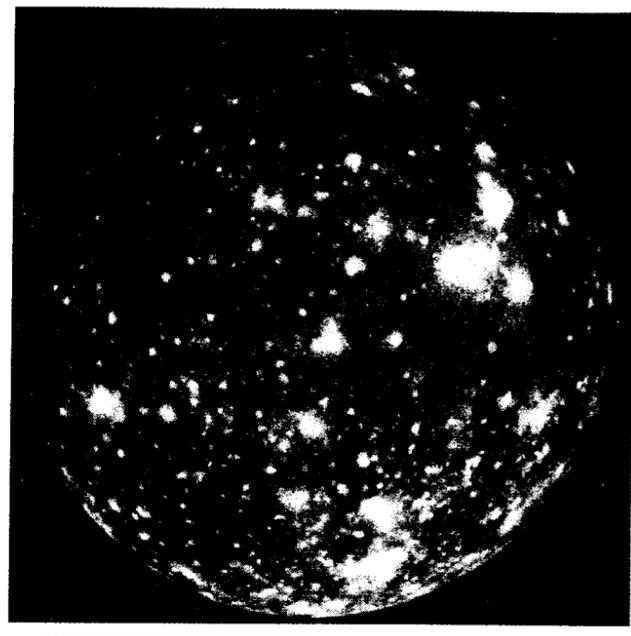


Figura 36 Problema 45.

la masa de la nave? (c) ¿Cuál es la aceleración debida a la gravedad cerca de la superficie de Calisto?

46. Años atrás, las barcasas que viajaban por los canales eran arrastradas por caballos como se muestra en la figura 37. Supongamos que el caballo está ejerciendo una fuerza de 7900 N a un ángulo de  $18^\circ$  con la dirección del movimiento de la barcaza, la cual navega en línea recta por el canal. La masa de la barcaza es de 9500 kg y su aceleración es de  $0.12 \text{ m/s}^2$ . Calcule la fuerza ejercida por el agua sobre la barcaza.

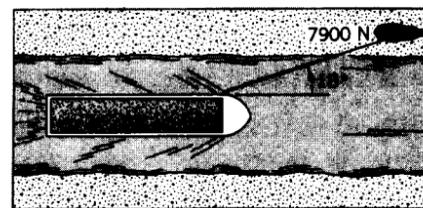


Figura 37 Problema 46.

47. Un cohete y su carga útil tienen una masa total de 51,000 kg. ¿Cuál es el empuje del motor del cohete cuando (a) el cohete está "flotando" sobre la plataforma de lanzamiento, justo después del encendido, y (b) cuando el cohete está acelerando hacia arriba a razón de  $18 \text{ m/s}^2$ ?

48. Un avión de combate a chorro despegó a un ángulo de  $27.0^\circ$  con la horizontal, acelerando a  $2.62 \text{ m/s}^2$ . El peso del avión es de 79,300 N. Halle (a) el empuje  $T$  del motor del avión y (b) la fuerza ascensional  $L$  ejercida por el aire perpendicularmente a las alas; véase la figura 38. Desprecie la resistencia del aire.

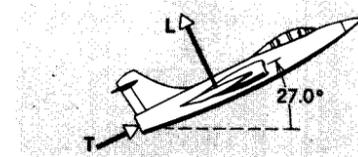


Figura 38 Problema 48

49. Un globo de investigación con una masa total  $M$  está descendiendo verticalmente con una aceleración  $a$  hacia abajo (Véase la Fig. 39.) ¿Cuánto lastre debe ser arrojado de la canastilla para dar al globo una aceleración  $a$  hacia arriba, suponiendo que la fuerza ascensional del aire sobre el globo no cambie?

50. Un cohete con masa de 3030 kg se dispara estando en reposo desde el terreno con un ángulo de elevación de  $58.0^\circ$ . El motor ejerce un empuje de 61.2 kN a un ángulo constante de  $58.0^\circ$  con la horizontal durante 48.0 s y luego el motor se detiene. Desprecie la masa del combustible consumido y desprecie la fuerza aerodinámica de resisten-

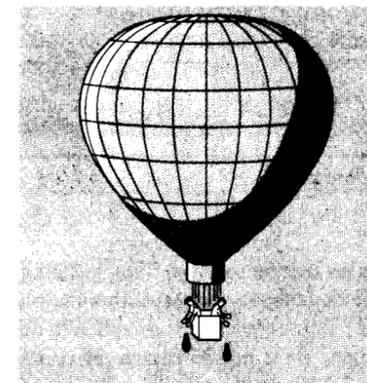


Figura 39 Problema 49.

cia. Calcule (a) la altitud del cohete cuando el motor se detiene, y (b) la distancia total desde el punto de disparo hasta el impacto.

51. Un bloque, de masa  $m$ , se desliza hacia abajo en un plano inclinado sin fricción que forma un ángulo  $\theta$  con el piso de un elevador. Halle su aceleración con relación al plano en los casos siguientes. (a) El elevador desciende a velocidad constante  $v$ . (b) El elevador asciende a velocidad constante  $v$ . (c) El elevador desciende con una aceleración  $a$ . (d) El elevador desciende con una deceleración  $a$ . (e) El cable del elevador se rompe. (f) En la parte (c) de arriba, cuál es la fuerza ejercida sobre el bloque por el plano inclinado?

Sección 5-11 Más aplicaciones de las leyes de Newton

52. Refiérase a la figura 18. Sea  $m_1 = 4.30 \text{ kg}$  y  $m_2 = 1.80 \text{ kg}$ . Halle (a) la aceleración de los dos bloques, y (b) la tensión en la cuerda.

53. Un hombre de 110 kg desciende al suelo desde una altura de 12 m sujetando una cuerda que pasa por una polea sin fricción atada a un saco de arena de 74 kg. (a) ¿A qué velocidad alcanza el hombre el suelo? (b) ¿Podría haber hecho algo para reducir la velocidad con que alcanza el suelo?

54. Un chango de 11 kg está trepando por una cuerda carente de masa que está unida a un tronco de 15 kg y pasa sobre una rama de un árbol (¡sin fricción!). ¿Con qué aceleración mínima deberá trepar el chango por la cuerda de modo que pueda elevar al tronco de 15 kg desde el suelo? Si, después de que el tronco se haya elevado, el chango deja de trepar y se cuelga de la cuerda, ¿cuál será ahora (b) la aceleración del chango y (c) la tensión en la cuerda?

55. Tres bloques están unidos como se muestra en la figura 40 sobre una mesa horizontal carente de fricción y son jalados hacia la derecha con una fuerza  $T_3 = 6.5 \text{ N}$ . Si  $m_1 = 1.2 \text{ kg}$ ,  $m_2 = 2.4 \text{ kg}$ , y  $m_3 = 3.1 \text{ kg}$ , calcule (a) la aceleración del sistema y (b) las tensiones  $T_1$  y  $T_2$ . Trace una analogía de los cuerpos que están siendo jalados en tándem, tal como si una locomotora jalara de un tren de carros acoplados.

56. Dos bloques están en contacto sobre una mesa carente de fricción. Se aplica una fuerza horizontal a un bloque, como

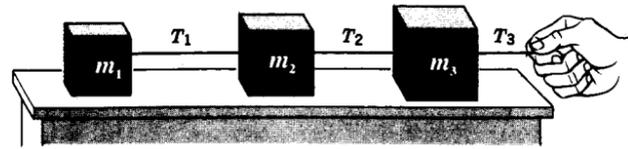


Figura 40 Problema 55.

se muestra en la figura 41. (a) Si  $m_1 = 2.3 \text{ kg}$ ,  $m_2 = 1.2 \text{ kg}$ , y  $F = 3.2 \text{ N}$ , halle la fuerza de contacto entre los dos bloques. (b) Demuestre que si se aplica la misma fuerza  $F$  a  $m_2$  en lugar de a  $m_1$ , la fuerza de contacto entre los bloques es  $2.1 \text{ N}$ , el cual no es el mismo valor derivado en (a). Explique.

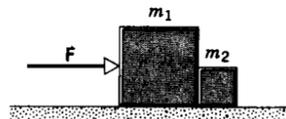


Figura 41 Problema 56.

57. La figura 42 muestra tres cajas con masas  $m_1 = 45.2 \text{ kg}$ ,  $m_2 = 22.8 \text{ kg}$ , y  $m_3 = 34.3 \text{ kg}$  sobre una superficie horizontal carente de fricción. (a) ¿Qué fuerza horizontal  $F$  se necesita para empujar las cajas hacia la derecha, como si fueran una sola unidad, con una aceleración de  $1.32 \text{ m/s}^2$ ? (b) Halle la fuerza ejercida por  $m_2$  sobre  $m_3$ . (c) Y por  $m_1$  sobre  $m_2$ .

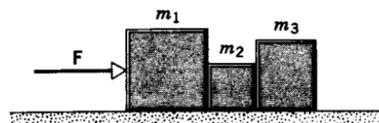


Figura 42 Problema 57.

58. Una cadena que consta de cinco eslabones, cada uno con una masa de  $100 \text{ g}$ , se levanta verticalmente con una aceleración constante de  $2.50 \text{ m/s}^2$ , como se muestra en la figura 43. Halle (a) las fuerzas que actúan entre eslabones adyacentes, (b) la fuerza  $F$  ejercida en el eslabón superior por el agente que eleva la cadena, y (c) la fuerza neta en cada eslabón.



Figura 43 Problema 58.

59. Un bloque de masa  $m_1 = 3.70 \text{ kg}$  está sobre un plano inclinado de ángulo  $\theta = 28.0^\circ$ , y unido por una cuerda sobre una polea pequeña, sin fricción y sin masa, a un segundo bloque de masa  $m_2 = 1.86 \text{ kg}$  que cuelga verticalmente (véase la figura 44), (a) ¿cuál es la aceleración de cada bloque? (b) Halle la tensión en la cuerda.

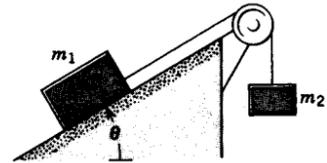


Figura 44 Problema 59.

60. Un paracaidista de  $77 \text{ kg}$  experimenta una aceleración hacia abajo de  $2.5 \text{ m/s}^2$  poco después de abrirse el paracaídas. La masa del paracaídas es de  $5.2 \text{ kg}$ . (a) Halle la fuerza hacia arriba ejercida en el paracaídas por el aire. (b) Calcule la fuerza hacia abajo ejercida por el paracaidista.

61. Un elevador consta de una cabina (A), el contrapeso (B), el mecanismo de maniobra (C), y el cable y las poleas que se muestran en la figura 45. La masa de la cabina es de  $1000 \text{ kg}$  y la masa del contrapeso es de  $1400 \text{ kg}$ . Desprecie la fricción y las masas del cable y de las poleas. El elevador acelera hacia arriba a razón de  $2.30 \text{ m/s}^2$  y el contrapeso acelera hacia abajo en una cantidad igual. ¿Cuáles son los valores de las tensiones (a)  $T_1$  y (b)  $T_2$ ? (c) ¿Cuál es la fuerza ejercida sobre el cable por el mecanismo?

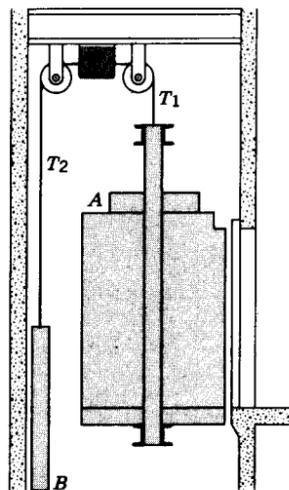


Figura 45 Problema 61.

62. Un helicóptero de  $15,000 \text{ kg}$  está elevando un vehículo de  $4500 \text{ kg}$  con una aceleración hacia arriba de  $1.4 \text{ m/s}^2$ . Calcule (a) la fuerza vertical que el aire ejerce sobre las paletas del helicóptero, y (b) la tensión en el cable de soporte superior; véase la figura 46.

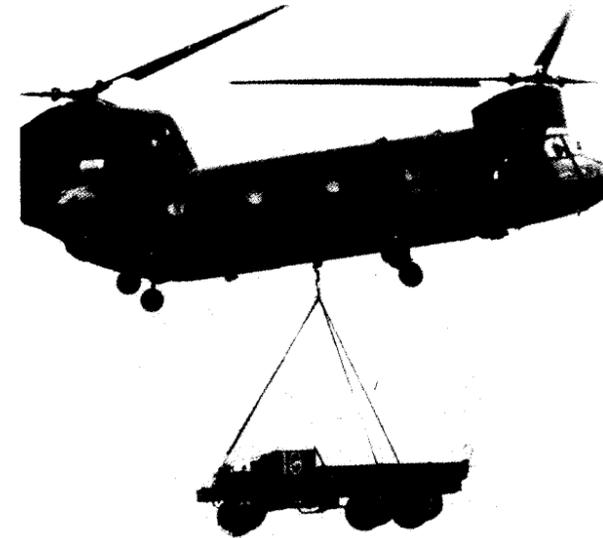


Figura 46 Problema 62.

63. Alguien ejerce una fuerza  $F$  directamente hacia arriba sobre el eje de la polea que se muestra en la figura 47. Considere que la polea y el cable carecen de masa y que el buje carece de fricción. Dos objetos,  $m_1$  de  $1.2 \text{ kg}$  de masa y  $m_2$  de  $1.9 \text{ kg}$  de masa, están unidos como se muestra a los extremos opuestos del cable, el cual pasa sobre la polea. El objeto  $m_2$  está en contacto con el piso. (a) ¿cuál es el valor más grande que la fuerza  $F$  puede tener de modo que  $m_2$  permanezca en reposo sobre el piso? (b) ¿Cuál es la tensión en el cable cuando la fuerza  $F$  hacia arriba sea de  $110 \text{ N}$ ? (c) Con la tensión determinada en la parte (b), ¿Cuál es la aceleración de  $m_1$ ?

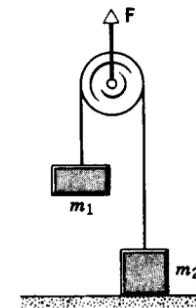


Figura 47 Problema 63.

64. Dos partículas, cada una de masa  $m$ , están unidas por un cordel delgado de longitud  $2L$ , como se muestra en la figura 48. Una fuerza uniforme  $F$  se aplica en el punto medio del cordel ( $x = 0$ ) formando un ángulo recto con la posición inicial del cordel. Demuestre que la aceleración de cada masa en dirección a  $90^\circ$  con  $F$  está dada por

$$a_x = \frac{F}{2m} \frac{x}{(L^2 - x^2)^{1/2}}$$

donde  $x$  es la distancia perpendicular de una de las partículas desde la línea de acción de  $F$ . Discuta la situación cuando  $x = L$ .

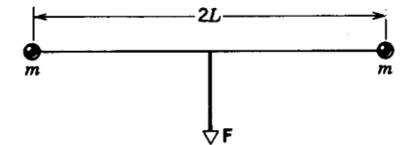


Figura 48 Problema 64.

65. Un bloque de masa  $M$  es jalado a lo largo de una superficie horizontal sin fricción por un cable de masa  $m$  como se muestra en la figura 49. Se aplica una fuerza horizontal  $P$  a un extremo del cable. (a) Demuestre que el cable debe combarse, aun cuando sólo sea en una cantidad imperceptible. Luego, suponiendo que la comba sea despreciable, halle (b) la aceleración del cable y del bloque, (c) la fuerza que el cable ejerce sobre el bloque, y (d) la tensión del cable en su punto medio.



Figura 49 Problema 65.

66. La figura 50 muestra una sección de un sistema alpino de vagones movidos por la tracción de un cable. La masa máxima permitida de cada vagón con ocupantes es de  $2800 \text{ kg}$ . Los vagones, que viajan sobre un cable de soporte, son jalados por un segundo cable unido a cada torre. ¿Cuál es la diferencia de tensión entre secciones adyacentes del cable de tracción si los vagones son acelerados hacia arriba con una inclinación de  $35^\circ$  a razón de  $0.81 \text{ m/s}^2$ ?

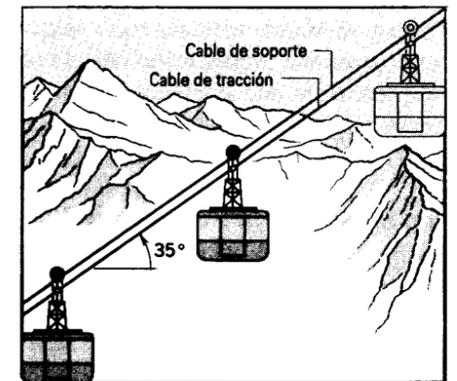


Figura 50 Problema 66.

67. El hombre de la figura 51 pesa  $180 \text{ lb}$ ; la plataforma y la polea sin fricción unida a ella pesan un total de  $43 \text{ lb}$ .



Figura 51 Problema 67

Desprecie el peso del cable. ¿Con qué fuerza debe el hombre jalar del cable con objeto de elevarse a sí mismo y a la plataforma a razón de  $1.2 \text{ ft/s}^2$ ?

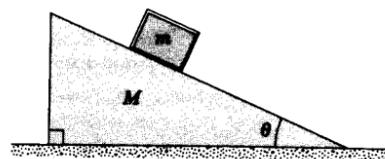


Figura 52 Problema 68.

68. Una cuña en triángulo rectángulo de masa  $M$  y ángulo  $\theta$ , que soporta un pequeño bloque de masa  $m$  sobre su lado, descansa sobre una mesa horizontal, como se muestra en la figura 52. (a) ¿Qué aceleración horizontal  $a$  deberá tener  $M$  con relación a la mesa para mantener a  $m$  estacionaria con respecto a la cuña, suponiendo contactos carentes de fricción? (b) ¿Qué fuerza horizontal  $F$  deberá ser aplicada al sistema para obtener este resultado, suponiendo que la cubierta de la mesa no tenga fricción? (c) Suponga que no se imprime fuerza alguna sobre  $M$  y que ambas superficies carecen de fricción. Describa el movimiento resultante.

## CAPÍTULO 6

### DINÁMICA DE LAS PARTÍCULAS

En el capítulo 5 estudiamos las leyes de Newton y dimos algunos ejemplos de sus aplicaciones. Estos ejemplos fueron simplificados en extremo, en forma deliberada con el fin de ilustrar la aplicación de las leyes. En el proceso de simplificación, tuvimos que pasar por alto algunos razonamientos físicos. Por ejemplo, un problema esencial en la mecánica, que concierne al diseño de sistemas mecánicos, lo constituye el tema de la fricción. Ninguno de los ejemplos considerados en el capítulo 5 dejó paso a la intervención de la fricción.

En este capítulo continuaremos con más aplicaciones de las leyes de Newton. Estudiaremos ahora las fuerzas de fricción y sus consecuencias. Discutiremos las fuerzas no constantes mostrando cómo resolver las ecuaciones del movimiento para tales fuerzas. Finalmente, demostraremos cómo el uso de un marco de referencia no inercial produce efectos que pueden ser analizados con la introducción de fuerzas inerciales o seudofuerzas que, en contraste con las fuerzas que discutimos en el capítulo 5, no son causadas por objetos específicos del entorno.

#### 6-1 LEYES DE LA FUERZA

Antes de regresar a las aplicaciones de las leyes de Newton, debemos tratar brevemente la naturaleza de las fuerzas en sí mismas. Hemos empleado las ecuaciones de movimiento para analizar y calcular los efectos de las fuerzas, pero éstas no nos dicen nada acerca de las causas de las fuerzas. Para entender qué produce una fuerza debemos tener una comprensión microscópica detallada de las interacciones mutuas de los objetos con su entorno. Al nivel más fundamental, la naturaleza parece actuar a través de un pequeño número de fuerzas fundamentales. Los físicos han identificado tradicionalmente cuatro fuerzas básicas: (1) *la fuerza de gravitación*, que se origina con la presencia de la materia (o, más en línea con la teoría general de la relatividad, la materia y la energía); (2) *la fuerza electromagnética*, que incluye las interacciones eléctricas y magnéticas básicas, y es responsable del enlace de los átomos y de la estructura de los sólidos; (3) *la fuerza nuclear débil*, que genera determinados procesos de desintegración radiactiva y ciertas reacciones entre las partículas más fundamentales, y (4) *la fuerza fuerte*, que opera entre las partículas fundamentales y es responsable de la estabilidad del núcleo.

En la escala más microscópica, por ejemplo, dos protones que apenas se toquen en sus superficies, estas fuerzas tendrían las intensidades relativas siguientes: fuerte (intensidad relativa = 1); electromagnética ( $10^{-2}$ ); débil ( $10^{-2}$ ); gravitatoria ( $10^{-38}$ ). En la escala fundamental, la gravedad es sumamente débil y tiene efectos despreciables. Podemos tener cierta apreciación de la debilidad de la gravedad por algunos experimentos comunes, por ejemplo, levantar unos cuantos trozos de papel con un peine cargado electrostáticamente, o levantar unos cuantos clavos o clips de papelería con un imán. ¡La fuerza magnética de un imán pequeño es suficiente para superar la fuerza de gravitación ejercida por toda la Tierra sobre estos objetos!

La búsqueda de una simplificación mayor ha conducido a los físicos a tratar de reducir el número de fuerzas a menos, incluso, de cuatro. En 1967 se propuso una teoría según la cual las fuerzas débiles y las electromagnéticas podrían ser vistas como partes de una sola fuerza, llamada *fuerza electrodébil*. La combinación o *unificación* de estas dos fuerzas es similar a la unificación en el siglo XIX de la fuerza eléctrica y la fuerza magnética aisladas en una sola fuerza electromagnética. Han sido propuestas recientemente otras teorías, llamadas *teorías de la gran unificación*, que combinan a la fuerza fuerte y a la electrodébil

en un solo sistema, e incluso existen "teorías de todo" que intentan incluir también a la gravedad.

Una predicción de estas teorías es que el protón (la partícula nuclear cargada positivamente) no es estable sino que se desintegra en un periodo prolongado, de quizá  $10^{33}$  años (realmente un tiempo muy largo, en comparación con la edad del Universo,  $10^{10}$  años). Una manera de probar esta teoría es observar un conjunto de  $10^{33}$  protones (equivalente a un cubo de agua de 50 pies de lado) durante un año para ver si uno de los protones se desintegra. Se necesitan de experimentos iguales a los de buscar una aguja en un pajar para probar estas exóticas teorías. En el capítulo 56 de la versión ampliada de este texto consideraremos otras especulaciones de este tipo.

Por fortuna, nuestro análisis de los sistemas mecánicos no necesita invocar tales teorías. De hecho, en todo lo que estudiamos sobre sistemas mecánicos ordinarios intervienen sólo dos fuerzas: la gravedad y el electromagnetismo. La fuerza gravitatoria es aparente en la atracción de los objetos por la Tierra, la cual les da su peso. La atracción gravitatoria mucho más débil de un objeto de laboratorio sobre otro es casi siempre despreciable.

Todas las demás fuerzas que consideramos de manera normal son esencialmente de origen electromagnético: las fuerzas de contacto, tal como la fuerza normal ejercida cuando un objeto empuja a otro, y la fuerza de fricción producida cuando una superficie frota contra otra; las fuerzas viscosas, tales como la resistencia del aire; las fuerzas de tensión, como la de un cable o una cuerda estirados; las fuerzas elásticas, como las de un resorte, y muchas otras. Microscópicamente, estas fuerzas se originan de las fuerzas entre los átomos. Por fortuna, cuando tratamos con sistemas mecánicos ordinarios podemos no tomar en cuenta la base microscópica y reemplazar la complicada subestructura con una sola fuerza efectiva de magnitud y dirección específicas.

## 6-2 FUERZAS DE FRICCIÓN\*

Si lanzamos un bloque de masa  $m$  a una velocidad inicial  $v_0$  a lo largo de una mesa horizontal larga, al final llegará al reposo. Esto significa que, mientras se está moviendo, experimenta una aceleración promedio  $\bar{a}$  que apunta en dirección opuesta a su movimiento. Si (en un marco inercial) vemos que un cuerpo es acelerado, siempre asociamos a una fuerza, definida por la segunda ley de Newton, con el movimiento. En este caso afirmamos que la mesa ejerce una fuerza de *fricción* sobre el bloque, cuyo

\* Para una buena referencia general sobre fricción, véase el artículo sobre este tema en la *Encyclopaedia Britannica*, 14a. edición.

valor promedio es  $m\bar{a}$ . Generalmente aceptamos que la fricción significa una interacción de contacto entre sólidos. Los efectos de la fricción en los líquidos y los gases se describen en otros términos (véase la sección 6-7).

En realidad, cuando la superficie de un cuerpo se desliza sobre la de otro, los dos cuerpos ejercen una fuerza de fricción entre ellos. La fuerza de fricción de cada cuerpo es de dirección opuesta a su movimiento relativo al otro cuerpo. Las fuerzas de fricción se oponen automáticamente a este movimiento relativo y nunca contribuyen a él. Aun cuando no exista un movimiento relativo, pueden existir fuerzas de fricción entre superficies.

Aunque hasta ahora no hemos tenido en cuenta estos efectos, la fricción es muy importante en nuestras vidas cotidianas. Si se la dejara actuar sola, todas las flechas (ejes) dejarían de girar. En un automóvil se usa alrededor del 20% de la potencia del motor para contrarrestar las fuerzas de fricción. La fricción causa el desgaste y agarre de partes en movimiento, y se lleva a cabo un gran esfuerzo de ingeniería para reducirlas. Por otra parte, sin fricción no podríamos caminar; no podríamos sujetar un lápiz y si pudiésemos hacerlo, no podríamos escribir; el transporte sobre ruedas, tal como lo conocemos, no sería posible.

Queremos conocer cómo expresar las fuerzas de fricción en función de las propiedades del cuerpo y de su entorno; esto es, queremos conocer la ley de la fuerza para las fuerzas de fricción. En lo que sigue, consideraremos el deslizamiento (no el rodamiento) de una superficie seca (no lubricada) sobre otra. Como veremos más adelante, la fricción, vista a nivel microscópico, es un fenómeno muy complicado. Las leyes de la fuerza para una fricción seca, deslizante, son de carácter empírico y aproximadas en sus predicciones. No tienen la sencillez elegante y la precisión que encontramos en la ley de la fuerza de la gravitación (capítulo 16) o de la fuerza electrostática (capítulo 27). Sin embargo, es notable, considerando la enorme diversidad de superficies que uno encuentra, que muchos aspectos del comportamiento de la fricción puedan ser entendidos cualitativamente sobre la base de unos cuantos mecanismos simples.

Consideremos un bloque en reposo sobre una mesa horizontal, como en la figura 1a. Unámosle un resorte para medir la fuerza horizontal  $F$  requerida para poner al bloque en movimiento. Encontramos que el bloque no se mueve todavía cuando aplicamos una fuerza pequeña (Fig. 1b). Decimos que la fuerza que aplicamos está equilibrada por una fuerza de fricción  $f$  opuesta, ejercida sobre el bloque por la mesa, que actúa a lo largo de la superficie de contacto. Al aumentar la fuerza aplicada (Fig. 1c, d), hallamos alguna fuerza definida mediante la cual el bloque se "desprende" de la superficie y comienza a acelerar (Fig. 1e). Al reducir la fuerza una vez que se ha iniciado el movimiento, encontramos que es posible mantener al bloque en movimiento uniforme sin acelera-

ción (Fig. 1f). La figura 1g muestra los resultados de un experimento para medir la fuerza de fricción. Se aplica una fuerza  $F$  creciente en, aproximadamente,  $t = 2$  s, después de lo cual la fuerza de fricción aumenta con la fuerza aplicada y el objeto permanece en reposo. En  $t = 4$  s el objeto comienza súbitamente a moverse y la fuerza de fricción se vuelve constante, independientemente de la fuerza aplicada.

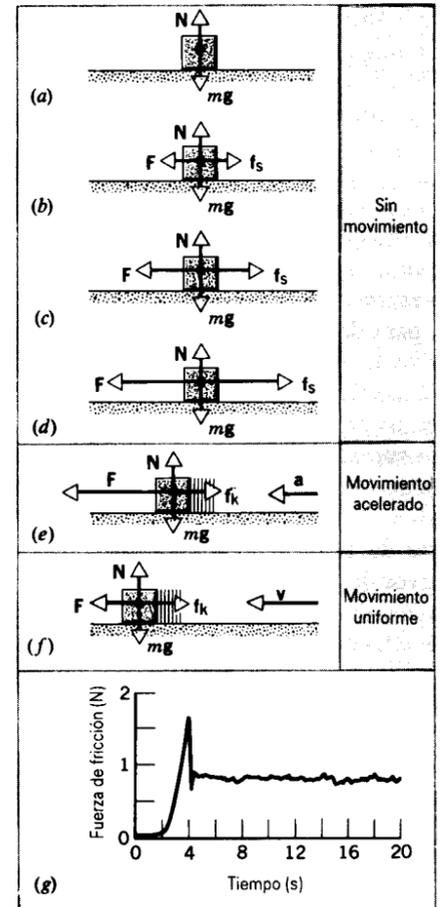
Las fuerzas de fricción que actúan entre superficies en reposo una respecto a la otra se llaman fuerzas de *fricción estática*. La fuerza máxima de fricción estática (correspondiente al pico en  $t = 4$  s en la Fig. 1g) será la misma que la fuerza aplicada más pequeña necesaria para iniciar el movimiento. Una vez que se ha iniciado el movimiento, las fuerzas de fricción que actúan entre las superficies usualmente disminuyen de manera que sólo es necesaria una fuerza más pequeña para mantener un movimiento uniforme (correspondiente a la fuerza casi constante en  $t > 4$  s en la Fig. 1g). Las fuerzas que actúan entre superficies en movimiento relativo se llaman fuerzas de *fricción cinética*.

La fuerza máxima de fricción estática entre cualquier par de superficies no lubricadas responde a estas dos leyes empíricas: (1) Es aproximadamente independiente del área de contacto dentro de límites amplios, y (2) es proporcional a la fuerza normal.\* La fuerza normal se debe a las propiedades elásticas de los cuerpos en contacto (véase el capítulo 14). Estos cuerpos nunca son enteramente rígidos, y cuando se ejerce una fuerza sobre un cuerpo que no puede moverse en dirección de la fuerza, el cuerpo empuja en contra para evitar ser estirado o deformado. En un bloque que está en reposo sobre una mesa horizontal o se desliza sobre ella, la fuerza normal es igual en magnitud al peso del bloque. Ya que el bloque no tiene aceleración vertical, la mesa debe ejercer una fuerza sobre el bloque dirigida hacia arriba, que es igual en magnitud al jalón hacia abajo de la Tierra sobre el bloque, esto es, igual al peso del bloque.

La razón entre la magnitud de la fuerza *máxima* de fricción estática y la magnitud de la fuerza normal se llama *coeficiente de fricción estática* de las superficies implicadas. Si  $f_s$  representa la magnitud de la fuerza de fricción estática, podemos escribir que

$$f_s \leq \mu_s N, \quad (1)$$

\* Las dos leyes de la fricción fueron descubiertas experimentalmente por Leonardo da Vinci (1452-1519). El enunciado de las dos leyes de Leonardo fue notable, teniendo en cuenta que llegó a su descubrimiento dos siglos antes de que Newton desarrollara los conceptos de fuerza. Las expresiones matemáticas de las leyes de la fricción y el concepto del coeficiente de fricción fueron desarrollados por Charles Augustin Coulomb (1736-1806), que es mejor conocido por sus estudios de electrostática (véase el capítulo 27).



**Figura 1** (a - d) Una fuerza externa  $F$ , aplicada a un bloque en reposo, es contrarrestada por una fuerza de fricción  $f$  igual y opuesta. Al aumentar  $F$ , también aumenta  $f$ , hasta que  $f$  llega a cierto valor máximo. (e) El bloque se "desprende" entonces, acelerándose hacia la izquierda. (f) Si el bloque ha de moverse a velocidad constante, la fuerza aplicada  $F$  debe reducirse respecto al valor máximo que tenía justamente antes de que el bloque comenzara a moverse. (g) Resultados experimentales; aquí la fuerza aplicada  $F$  se aumenta desde el inicio de cero, aproximadamente en  $t = 2$  s, y el movimiento comienza en forma súbita, aproximadamente en  $t = 4$  s. Para detalles del experimento, véase "Undergraduate Computer-Interfacing Projects", por Joseph Priest y John Snyder, *The Physics Teacher*, Mayo 1987, pág. 303.

donde  $\mu_s$  es el coeficiente de fricción estática y  $N$  es la magnitud de la fuerza normal. El signo de igualdad se tiene sólo cuando  $f_s$  alcance su valor máximo.

La fuerza de fricción cinética  $f_k$  entre superficies secas no lubricadas, sigue las mismas leyes que las dos de fricción estática. (1) Es aproximadamente independiente del área de contacto dentro de límites amplios, y (2) es proporcional a la fuerza normal. La fuerza de fricción cinética es también razonablemente independiente de la velocidad relativa con la que las superficies se mueven entre sí.

La relación entre la magnitud de la fuerza de fricción cinética y la magnitud de la fuerza normal se llama *coeficiente de fricción cinética*. Si  $f_k$  representa la magnitud de la fuerza de fricción cinética, entonces

$$f_k = \mu_k N, \quad (2)$$

donde  $\mu_k$  es el coeficiente de fricción cinética.

Tanto  $\mu_s$  como  $\mu_k$  son constantes sin dimensión, siendo cada una la razón de (las magnitudes de) dos fuerzas. Por lo general, para determinado par de superficies  $\mu_s > \mu_k$ . Los valores reales de  $\mu_s$  y de  $\mu_k$  dependen de la naturaleza de las dos superficies en contacto. En la mayoría de los casos podemos considerarlas como constantes (para un par dado de superficies) dentro de la gama de fuerzas y velocidades que encontramos comúnmente. Tanto  $\mu_s$  como  $\mu_k$  pueden exceder la unidad, aunque por lo general son menores de 1. La tabla 1 muestra algunos valores representativos de  $\mu_s$  y de  $\mu_k$ .

Nótese que las ecuaciones 1 y 2 son relaciones entre las *magnitudes solamente* de las fuerzas normal y de fricción. Estas fuerzas están siempre dirigidas perpendicularmente entre sí.

**La base microscópica de la fricción (Opcional)**

En la escala atómica aun la superficie más finamente pulida está lejos de ser plana. La figura 2, por ejemplo, muestra un perfil real, muy aumentado, de una superficie de acero que podría ser considerada como muy pulida. Podríamos creer que cuando dos cuerpos están en contacto, el área microscópica de contacto real es mucho menor que el área verdadera de la superficie; en un caso particular estas áreas estarían fácilmente en una razón de 1:10<sup>4</sup>.

El área (microscópica) de contacto real es proporcional a la fuerza normal, porque los puntos de contacto se deforman plásticamente bajo los grandes esfuerzos que se desarrollan en ellos. Muchos puntos de contacto realmente resultan "soldados en frío". Este fenómeno, llamado *adhesión superficial*, ocurre a causa de que los puntos de contacto de las moléculas en lados opuestos de la superficie están tan próximos entre sí que ejercen fuerzas intermoleculares fuertes entre ellas.



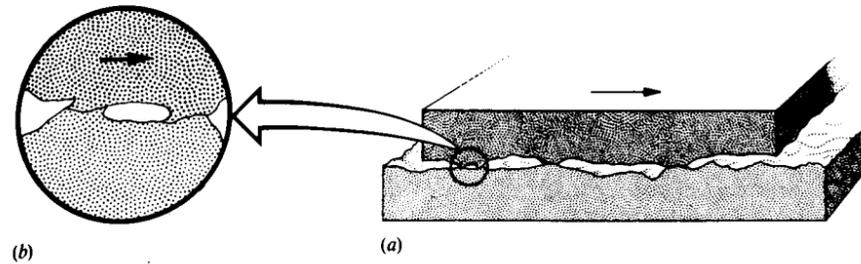
**Figura 2** Una sección aumentada de una superficie de acero muy pulida. La escala vertical de las irregularidades de la superficie es de varios miles de diámetros atómicos. La sección ha sido cortada a un ángulo tal que la escala vertical resulta exagerada con respecto a la escala horizontal en un factor de 10.

Cuando un cuerpo (digamos, un metal) es arrastrado por encima de otro, la resistencia por fricción se asocia con la rotura de estos miles de pequeñísimas soldaduras, las cuales se vuelven a formar continuamente según va habiendo ocasión de nuevos contactos (véase la Fig. 3). Los experimentos de indicadores radiactivos han demostrado que, en el proceso de rotura, pequeños fragmentos de una superficie metálica pueden ser cortados y adherirse a la otra superficie. Si la velocidad relativa de las dos superficies es suficientemente grande, puede haber fusión local en ciertas áreas de contacto aun cuando la superficie, como un total, pueda sentirse sólo moderadamente tibia. El fenómeno de "pegarse y resbalar" es el causante de los ruidos que hacen las superficies secas cuando se deslizan una contra la otra como, por ejemplo, el chirrido de la tiza contra el pizarrón.\*

El coeficiente de fricción depende de muchas variables, tales como la naturaleza de los materiales, el acabado de la superficie, las películas sobre la superficie, la temperatura y la cantidad de contaminación. Por ejemplo, si dos superficies de metal cuidadosamente limpias se sitúan en una cámara al alto vacío de modo que no se formen películas de óxido en ellas, el coeficiente de fricción se eleva a valores enormes y las superficies realmente se "sueldan" entre sí con firmeza. La admisión de una pequeña cantidad de aire a la cámara de modo que se puedan formar películas de óxido sobre las superficies opuestas reduce el coeficiente de fricción a su valor "normal".

La fuerza de fricción que se opone a un cuerpo que rueda sobre otro es mucho menor que en el movimiento deslizante; esto le da la ventaja a la rueda, que gira, sobre el trineo, que se desliza. Esta fricción reducida se debe en gran parte al hecho de que, al rodar, las soldaduras microscópicas de contacto se descascarillan en lugar de cortarse como en el caso de la fricción deslizante. Esto reduce la fuerza de fricción en un factor grande.

La resistencia al rozamiento en la fricción seca, deslizante, puede reducirse considerablemente por medio de la lubricación. En una gruta en Egipto, un mural que data de 1900 A.C. muestra una gran estatua de piedra que es arrastrada sobre un vehículo a modo de trineo mientras el hombre enfrente del vehículo vierte aceite lubricante a su paso. Una técnica aún más eficaz consiste en introducir una capa de gas entre las superficies que se deslizan; dos ejemplos de ello son la mesa de aire del laboratorio y la chumacera soportada por gas. La fricción puede ser reducida aún más suspendiendo un objeto por medio de fuerzas magnéticas. Los trenes magnéticamente levitados que actualmente se hallan en desarrollo, tienen el potencial de viajar a alta velocidad, casi sin fricción. ■



**Figura 3** El mecanismo de la fricción deslizante. (a) En esta vista aumentada, la superficie superior se desliza hacia la derecha sobre la superficie inferior. (b) Un detalle, mostrando dos puntos en donde ha ocurrido una soldadura en frío. La fuerza es necesaria para romper estas soldaduras y mantener el movimiento.

**Problema muestra 1** Un bloque está en reposo sobre un plano inclinado que forma un ángulo  $\theta$  con la horizontal, como en la figura 4a. Cuando el ángulo de inclinación se eleva, se halla que el deslizamiento apenas comienza a un ángulo de inclinación  $\theta_s = 15^\circ$ . ¿Cuál es el coeficiente de fricción estática entre el bloque y el plano?

**Solución** En la figura 4b se muestran las fuerzas que actúan sobre el bloque, considerado como una partícula. El peso del bloque es  $mg$ , la fuerza normal ejercida sobre el bloque por la superficie inclinada es  $N$ , y la fuerza de fricción ejercida por la superficie inclinada sobre el bloque es  $f_s$ . Nótese que la fuerza resultante ejercida por la superficie inclinada sobre el bloque,  $N + f_s$ , ya no es perpendicular a la superficie de contacto, como lo sería en superficies carentes de fricción ( $f_s = 0$ ). El bloque está en reposo, de modo que la segunda ley de Newton da  $\Sigma F = 0$ . Resolviendo las fuerzas en sus componentes  $x$  y  $y$  (a lo largo del plano y normal al plano, respectivamente), obtenemos que

$$\begin{aligned} \text{componente } x: \quad \Sigma F_x = f_s - mg \sen \theta = 0 \quad \text{ó} \quad f_s = mg \sen \theta, \\ \text{componente } y: \quad \Sigma F_y = N - mg \cos \theta = 0 \quad \text{ó} \quad N = mg \cos \theta. \end{aligned}$$

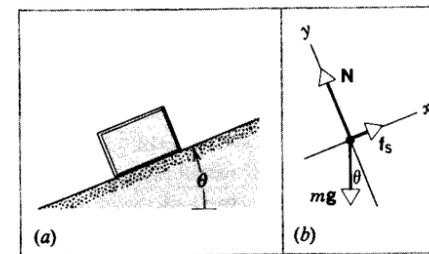
En el ángulo  $\theta_s$ , cuando el deslizamiento apenas comienza,  $f_s$  tiene su valor máximo y es igual a  $\mu_s N$ . Evaluando estas expresiones para  $\theta_s$  y dividiendo una entre otra, obtenemos

$$\frac{f_s}{N} = \frac{mg \sen \theta_s}{mg \cos \theta_s} = \tan \theta_s$$

o sea

$$\mu_s = \tan \theta_s = \tan 15^\circ = 0.27.$$

De aquí que la medición del ángulo de inclinación cuando el deslizamiento apenas comienza proporciona un método experi-



**Figura 4** Problema muestra 1. (a) Un bloque en reposo sobre un plano inclinado rugoso. (b) Un diagrama de cuerpo libre del bloque.

mental sencillo para determinar el coeficiente de fricción estática entre dos superficies. Nótese que esta determinación es independiente del peso del objeto.

Podemos emplear argumentos similares para demostrar que el ángulo de inclinación  $\theta$ , requerido para mantener una *velocidad constante* del bloque al deslizarse por el plano, una vez que ha arrancado a causa de un golpe suave, está dado por

$$\mu_k = \tan \theta_k,$$

donde  $\theta_k < \theta_s$ . Con la ayuda de una regla para medir la tangente del ángulo de inclinación, podemos ahora determinar  $\mu_s$  y  $\mu_k$  para una moneda que se deslice a lo largo del libro de texto.

**Problema muestra 2** Consideremos un automóvil que se mueve a lo largo de una carretera recta horizontal a una velocidad  $v_0$ . Si el coeficiente de fricción estática entre las llantas y la carretera es  $\mu_s$ , ¿cuál es la distancia más corta en que puede ser detenido el automóvil?

**Solución** En la figura 5 se muestran las fuerzas que actúan sobre el automóvil. Se supone que el automóvil se está moviendo en dirección  $x$  positiva. Si suponemos que  $f_s$  es una fuerza constante, tendremos un movimiento de deceleración uniforme.

De la relación

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0),$$

con la posición inicial elegida, de modo que  $x_0 = 0$  y a una velocidad final de  $v = 0$ , obtenemos

$$x = -\frac{v_0^2}{2a},$$

donde  $x$  es la distancia de alto o parada en la que la velocidad cambia desde  $v_0$  hasta 0. A causa de que  $a$  es negativa,  $x$  es positiva, tal como lo esperábamos.

Para determinar  $a$ , aplicamos la segunda ley de Newton con sus componentes asignadas de acuerdo a la figura 5b:

$$\text{componente } x: \quad \Sigma F_x = -f_s = ma \quad \text{o} \quad a = -f_s/m,$$

$$\text{componente } y: \quad \Sigma F_y = N - mg = 0 \quad \text{o} \quad N = mg,$$

de modo que

$$f_s = \mu_s N = \mu_s mg.$$

Sustituyendo esta cantidad en la expresión para  $a$ , hallamos que

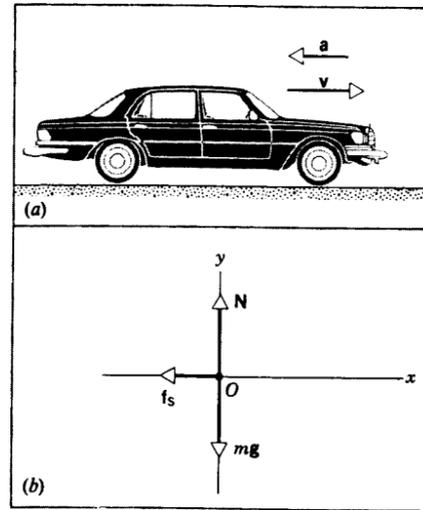
$$a = -\frac{f_s}{m} = -\mu_s g.$$

**TABLA 1** COEFICIENTES DE FRICCIÓN†

Superficies	$\mu_s$	$\mu_k$
Madera contra madera	0.25-0.5	0.2
Vidrio contra vidrio	0.9-1.0	0.4
Acero contra acero, superficies limpias	0.6	0.6
Acero contra acero, superficies lubricadas	0.09	0.05
Hule contra concreto seco	1.0	0.8
Madera encerada de un esquí contra nieve seca	0.04	0.04
Teflón contra Teflón	0.04	0.04

† Los valores son aproximados y se dan sólo como estimaciones. Los coeficientes de fricción reales para cualquier par de superficies dependen de condiciones tales como la limpieza de las superficies, la temperatura, y la humedad.

\* Véase, por ejemplo, "Stick and Slip", por Ernest Rabinowicz en *Scientific American*, Mayo 1956, pág. 109.



**Figura 5** Problema muestra 2. (a) Un automóvil decelerando. (b) Un diagrama de cuerpo libre del automóvil decelerando, considerado éste como una partícula. Por conveniencia, hacemos que todas las fuerzas actúen en un punto común. En realidad, las tres fuerzas mostradas son sumas de las fuerzas individuales que actúan sobre cada una de las cuatro llantas.

Entonces la distancia de parada es

$$x = -\frac{v_0^2}{2a} = \frac{v_0^2}{2\mu_s g}$$

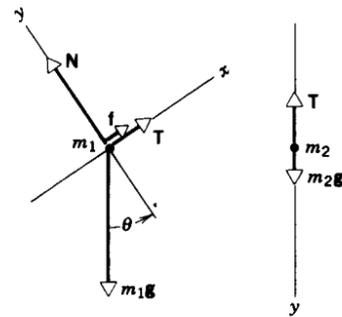
Cuanto mayor sea la velocidad inicial, mayor será la distancia requerida para llevar al automóvil al reposo; de hecho, esta distancia varía con el cuadrado de la velocidad inicial. También, cuanto más grande sea el coeficiente de fricción estática entre las superficies, menor será la distancia requerida para llegar a detener el automóvil.

En este problema hemos empleado el coeficiente de fricción estática, en lugar del coeficiente de fricción cinética, porque suponemos que no existe deslizamiento entre las llantas y la carretera. Además, hemos supuesto que opera la fuerza de fricción estática máxima ( $f_s = \mu_s N$ ) porque el problema busca la distancia más corta para detener al automóvil. Con una fuerza de fricción estática más pequeña la distancia para que se detenga sería obviamente mayor. La técnica de frenado correcta requerida aquí es mantener al automóvil justo a punto del patinaje. (Los automóviles equipados con sistemas de frenado anti-trabadura mantienen esta condición automáticamente.) Si la superficie es lisa y los frenos se accionan con fuerza, el automóvil puede patinar. En este caso  $\mu_k$  reemplaza a  $\mu_s$ , y la distancia requerida para detenerse aumentaría porque  $\mu_k$  es más pequeña que  $\mu_s$ .

Como un ejemplo específico, si  $v_0 = 60 \text{ mi/h} = 27 \text{ m/s}$ , y  $\mu_s = 0.60$  (un valor típico), obtenemos que

$$x = \frac{v_0^2}{2\mu_s g} = \frac{(27 \text{ m/s})^2}{2(0.60)(9.8 \text{ m/s}^2)} = 62 \text{ m.}$$

Nótese que este resultado es independiente de la masa del automóvil. En los automóviles con la propulsión en las ruedas traseras y con el motor en el frente, es una práctica común



**Figura 6** Problema muestra 3. Los diagramas de cuerpo libre de la figura 20 del capítulo 5, en el caso de fricción a lo largo del plano.

“cargar el baúl” con objeto de aumentar la seguridad cuando se conduce sobre carreteras heladas. ¿Cómo puede ser esta práctica consistente con nuestro resultado de que la distancia de parada es independiente de la masa del automóvil? (Sugerencia: véase el problema 2.)

**Problema muestra 3** Repita el problema muestra 10 del capítulo 5, teniendo en cuenta una fuerza de fricción entre el bloque 1 y el plano. Use los valores  $\mu_s = 0.24$  y  $\mu_k = 0.15$ .

**Solución** Si suponemos, como lo aprendimos en la solución al problema muestra 10 del capítulo 5, que el bloque 1 se mueve hacia abajo por el plano, entonces la fuerza de fricción actúa sobre el plano. En la figura 6 se muestra el diagrama de cuerpo libre de  $m_1$ . Las ecuaciones de las componentes de  $m_1$ , según la segunda ley de Newton son ahora las siguientes:

$$\begin{aligned} \text{componente } x: \sum F_x &= T + f - m_1 g \sin \theta = m_1 a_{1x} = -m_1 a, \\ \text{componente } y: \sum F_y &= N - m_1 g \cos \theta = m_1 a_{1y} = 0. \end{aligned}$$

Aquí hemos puesto explícitamente que  $a_x$  esté en la dirección  $x$  negativa (esto es,  $a_{1x} = -a$ ). Hacemos un cambio similar en la ecuación para  $m_2$ :

$$\sum F_y = m_2 g - T = m_2 a_{2y} = -m_2 a,$$

donde usamos que  $a_{2y} = -a$ , porque esperamos que el bloque 2 se mueva en la dirección  $y$  negativa.

Poniendo  $f = \mu_k N = \mu_k m_1 g \cos \theta$ , tenemos, de la ecuación de la componente  $x$  de  $m_1$ ,

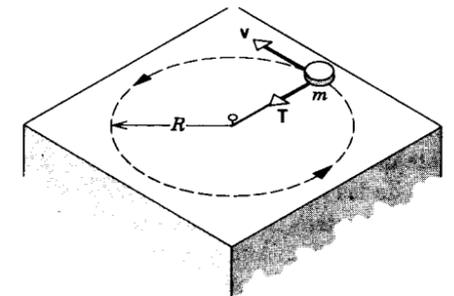
$$T + \mu_k m_1 g \cos \theta - m_1 g \sin \theta = -m_1 a.$$

Resolviendo estas dos últimas ecuaciones simultáneamente para las dos incógnitas  $a$  y  $T$ , obtenemos

$$a = -g \frac{m_2 - m_1 (\sin \theta - \mu_k \cos \theta)}{m_1 + m_2}, \quad (3)$$

$$T = \frac{m_1 m_2 g}{m_1 + m_2} (1 + \sin \theta - \mu_k \cos \theta). \quad (4)$$

Nótese que, en el límite de  $\mu_k \rightarrow 0$ , las ecuaciones 3 y 4 se reducen a las ecuaciones 9 y 10 del problema muestra 10 en el



**Figura 7** Un disco de masa  $m$  se mueve con velocidad constante en una trayectoria circular sobre una superficie horizontal sin fricción. La única fuerza horizontal que actúa sobre el disco es la tensión  $T$  con la que la cuerda jala al disco;  $T$  proporciona la fuerza centrípeta necesaria para el movimiento circular. No se muestran las fuerzas verticales ( $N$  y  $mg$ ).

$$|\sum \mathbf{F}| = ma = \frac{mv^2}{r}. \quad (5)$$

El cuerpo *no está* en equilibrio porque la fuerza neta  $\sum \mathbf{F}$  en cualquier instante debe ser la dirección de  $\mathbf{a}$  en ese instante, es decir, radialmente hacia dentro. Esta fuerza es proporcionada por un agente (o agentes) externo en el ambiente de la masa  $m$  en aceleración.

Si el cuerpo en movimiento circular uniforme es un disco que se gira amarrado al extremo de una cuerda sobre una mesa horizontal sin fricción como en la figura 7, la fuerza neta sobre el disco es proporcionada por la tensión  $T$  en el cordel. Acelera al disco cambiando constantemente la dirección de su velocidad de modo que el disco se mueve en círculo. La dirección de  $T$  es siempre hacia el alfiler del centro, y su magnitud debe ser igual a  $mv^2/R$ .

Si la cuerda fuese cortada donde se une al disco, no existiría ninguna fuerza neta ejercida sobre éste. El disco entonces se movería a velocidad constante en línea recta a lo largo de la dirección de la tangente al círculo en el punto en el que se cortó la cuerda. El disco *no volará* radialmente hacia afuera o en una trayectoria curva, sino que seguirá exactamente la dirección de  $\mathbf{v}$  en línea recta en el instante en que la cuerda se rompe.

Por lo tanto, para mantener al disco moviéndose en círculo, debe ser proporcionada una fuerza que jale de él *hacia el centro*. Las fuerzas responsables del movimiento circular uniforme se llaman fuerzas *centrípetas* porque están dirigidas “hacia el centro” del movimiento circular. Sin embargo, el hecho de catalogar a una fuerza como “centrípeta” significa simplemente que siempre apunta radialmente hacia adentro; el nombre no nos dice nada sobre la naturaleza de la fuerza o sobre el cuerpo que la ejerce. Así pues, en el disco giratorio de la figura 7, la fuerza centrípeta es una fuerza de tensión proporcionada por la cuerda; para la Luna que gira alrededor de la

capítulo 5 (excepto por el signo de  $a$ , el cual hemos querido que esté en dirección opuesta en la solución de este problema). Hallemos ahora los valores numéricos de  $a$  y de  $T$ :

$$\begin{aligned} a &= (-9.80 \text{ m/s}^2) \frac{2.6 \text{ kg} - 9.5 \text{ kg} (\sin 34^\circ - 0.15 \cos 34^\circ)}{2.6 \text{ kg} + 9.5 \text{ kg}} \\ &= 1.2 \text{ m/s}^2, \\ T &= \frac{(9.5 \text{ kg})(2.6 \text{ kg})(9.80 \text{ m/s}^2)}{9.5 \text{ kg} + 2.6 \text{ kg}} (1 + \sin 34^\circ - 0.15 \cos 34^\circ) \\ &= 29 \text{ N.} \end{aligned}$$

El valor positivo de  $a$  es consistente con la manera en que establecimos nuestras ecuaciones; el bloque se mueve hacia abajo por el plano, como lo hizo en el problema muestra 10 del capítulo 5, pero con menos aceleración que lo hizo en el caso sin fricción ( $2.2 \text{ m/s}^2$ ).

La tensión en la cuerda es menor de lo que era en el caso sin fricción (31 N). El bloque 1 acelera menos rápidamente hacia abajo por el plano cuando existe fricción, de modo que no jala tan fuertemente de la cuerda amarrada al bloque 2.

Una pregunta adicional que merece ser contestada es si el sistema llegará a moverse. Esto es, ¿existe suficiente fuerza hacia abajo del plano para exceder la fricción estática e iniciar el movimiento? Cuando el sistema está inicialmente en reposo, la tensión en la cuerda es igual al peso de  $m$ , o sea ( $2.6 \text{ kg}$ ) ( $9.8 \text{ m/s}^2$ ) = 26 N. La fricción estática máxima, que se opone a la tendencia a moverse hacia abajo por el plano, es de  $\mu_s N = \mu_s m_1 g \cos \theta = 19 \text{ N}$ . La componente del peso de  $m_1$  que actúa hacia abajo por el plano es  $m_1 g \sin \theta = 52 \text{ N}$ . Así, existe peso más que suficiente actuando hacia abajo por el plano (52 N) para superar el total de la tensión y de la fuerza estática de fricción (26 N + 19 N = 45 N), y el sistema realmente se moverá. Usted debería poder demostrar que si el coeficiente estático de la fricción es mayor de 0.34 entonces no existirá movimiento.

### 6-3 LA DINÁMICA DEL MOVIMIENTO CIRCULAR UNIFORME

En la sección 4-4 hicimos notar que si un cuerpo se mueve a velocidad uniforme  $v$  en un círculo o en un arco circular de radio  $r$ , experimenta una aceleración centrípeta  $\mathbf{a}$  cuya magnitud es  $v^2/r$ . La dirección de  $\mathbf{a}$  es siempre hacia el centro del círculo. Así pues,  $\mathbf{a}$  es un vector variable porque, aun cuando su magnitud permanezca constante, su dirección cambia continuamente según progresa el movimiento. Quizá el lector desee revisar la figura 11 del capítulo 4, la cual muestra la relación vectorial entre  $\mathbf{v}$  y  $\mathbf{a}$  en el movimiento circular a velocidad constante.

Cada cuerpo acelerado debe tener una fuerza neta que actúa sobre él, de acuerdo con la segunda ley de Newton ( $\sum \mathbf{F} = m\mathbf{a}$ ). Entonces (suponiendo que estamos en un marco inercial), si vemos un cuerpo que experimente un movimiento circular uniforme, podemos estar seguros de que la magnitud de la fuerza neta  $\sum \mathbf{F}$  que actúa sobre el cuerpo debe estar dada por

Tierra la fuerza centrípeta es la atracción gravitatoria de la Tierra sobre la Luna; para un electrón que gira alrededor de un núcleo atómico la fuerza centrípeta es electrostática. La fuerza centrípeta no es una nueva clase de fuerza sino simplemente una manera de describir el comportamiento en el tiempo de las fuerzas que son atribuibles a cuerpos específicos en el mismo ambiente. Así, una fuerza puede ser centrípeta y elástica, centrípeta y gravitatoria, o centrípeta y electrostática, entre otras posibilidades.

Consideremos algunos ejemplos de fuerzas que actúan centrípetamente.

### El péndulo cónico

La figura 8 muestra un cuerpo pequeño de masa  $m$  que gira en un círculo horizontal a velocidad constante  $v$  en el extremo de una cuerda de longitud  $L$ . Al moverse el cuerpo alrededor, el cordón barre la superficie de un cono imaginario. Este dispositivo se llama *péndulo cónico*. Hallemos el tiempo requerido para una revolución completa del cuerpo.

Si el cordón forma un ángulo  $\theta$  con la vertical, el radio de la trayectoria circular es  $R = L \sin \theta$ . Las fuerzas que actúan sobre el cuerpo de masa  $m$  son su peso  $mg$  y la tensión  $T$  de la cuerda, como se muestra en la figura 8b. En este caso la segunda ley de Newton da

$$\sum \mathbf{F} = \mathbf{T} + m\mathbf{g} = m\mathbf{a}.$$

Claramente, la fuerza neta que actúa sobre el cuerpo no es cero, lo cual es como debería de ser porque se requiere una fuerza para mantener al cuerpo moviéndose en círculo a velocidad constante.

Podemos descomponer  $\mathbf{T}$  en cualquier instante en una componente radial y otra vertical:

$$T_r = -T \sin \theta \quad \text{y} \quad T_z = T \cos \theta.$$

La componente radial es negativa si definimos que la dirección positiva es hacia afuera del eje.

Puesto que el cuerpo no tiene aceleración vertical, podemos escribir que la componente  $z$  es, según la segunda ley de Newton,

$$\sum F_z = T_z - mg = 0,$$

o sea

$$T \cos \theta = mg.$$

La aceleración radial es  $a_r = -v^2/R$ , negativa porque actúa radialmente hacia adentro (opuesta a la dirección de  $\mathbf{r}$ , la cual tomamos como la dirección radial positiva). Esta aceleración es proporcionada por  $T_r$ , la componente

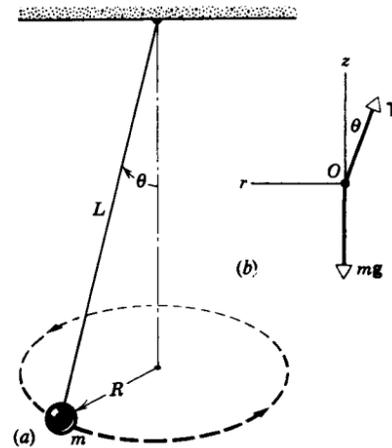


Figura 8 El péndulo cónico. (a) Un cuerpo de masa  $m$  suspendido de un cordón de longitud  $L$  se mueve en círculo; el cordón describe un cono circular recto de semiángulo  $\theta$ . (b) Un diagrama de cuerpo libre del cuerpo.

radial de  $\mathbf{T}$ , la cual proporciona la fuerza centrípeta que actúa sobre  $m$ . Por lo tanto, de la componente radial de la segunda ley de Newton,

$$\sum F_r = T_r = ma_r,$$

o sea

$$-T \sin \theta = -mv^2/R.$$

Al dividir las ecuaciones de la componente radial y de la componente  $z$ , obtenemos

$$\frac{-T \sin \theta}{T \cos \theta} = \frac{-mv^2/R}{mg}$$

o bien, resolviendo para  $v$ ,

$$v = \sqrt{Rg \tan \theta},$$

la cual da la velocidad constante del cuerpo. Si  $t$  es el tiempo para una revolución completa del cuerpo, entonces

$$v = \frac{2\pi R}{t}$$

o sea

$$t = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi R}{\sqrt{Rg \tan \theta}} = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g \tan \theta}}.$$

Pero  $R = L \sin \theta$ , de modo que

$$t = 2\pi \sqrt{\frac{L \cos \theta}{g}}. \quad (6)$$

Esta ecuación da la razón entre  $t$ ,  $L$ , y  $\theta$ . Nótese que  $t$ , llamada *periodo* del movimiento, no depende de  $m$ .

Si  $L = 1.2$  m y  $\theta = 25^\circ$ , ¿cuál es el periodo del movimiento? Tenemos que

$$t = 2\pi \sqrt{\frac{(1.2 \text{ m})(\cos 25^\circ)}{9.8 \text{ m/s}^2}} = 2.1 \text{ s}.$$

### El rotor

En muchos parques de diversión\* podemos encontrar un aparato llamado rotor. Es un espacio cilíndrico hueco que gira con respecto al eje vertical central del cilindro. La persona que utiliza el juego, entra al aparato, cierra la puerta, y se pone de pie contra la pared. El aparato aumenta gradualmente su velocidad rotatoria desde el reposo hasta que, a una velocidad predeterminada, el piso se abre hacia abajo, quedando al descubierto un hondo agujero. La persona no cae sino que permanece "adherida" contra la pared del rotor. ¿Qué velocidad rotatoria mínima es necesaria para impedir la caída?

En la figura 9 se muestran las fuerzas que actúan sobre la persona. El peso de la persona es  $mg$ , la fuerza de fricción estática entre la persona y la pared del aparato es  $f_s$ , y  $N$  es la fuerza normal ejercida por la pared sobre la persona (la cual, como veremos, proporciona la fuerza centrípeta necesaria). Como lo hicimos en el cálculo anterior, descomponemos las fuerzas en sus componentes radial y vertical. Definimos al eje  $z$  como positivo hacia arriba y, para que la persona no caiga, no debe haber aceleración en la dirección  $z$ . La componente  $z$  de la segunda ley de Newton da

$$\sum F_z = f_s - mg = ma_z = 0.$$

Sea  $R$  el radio del rotor y  $v$  la velocidad tangencial de la persona. El pasajero experimenta una aceleración radial  $-v^2/R$ , y la componente radial de la segunda ley de Newton puede ser escrita entonces así:

$$\sum F_r = -N = ma_r = \frac{-mv^2}{R}.$$

Nótese que  $N$  proporciona la fuerza centrípeta en este caso. Si  $\mu_s$  es el coeficiente de la fricción estática entre la persona y la pared necesaria para impedir el deslizamiento, entonces  $f_s = \mu_s N$  y hallamos que

$$f_s = mg = \mu_s N = \frac{\mu_s mv^2}{R}$$

o sea

$$v = \sqrt{\frac{gR}{\mu_s}}. \quad (7)$$

\* Véase "Fear and Trembling at the Amusement Park", por John Roeder y Jearl Walker, en *Fundamentals of Physics*, 3a. ed., por David Halliday y Robert Resnick (Wiley, 1988).

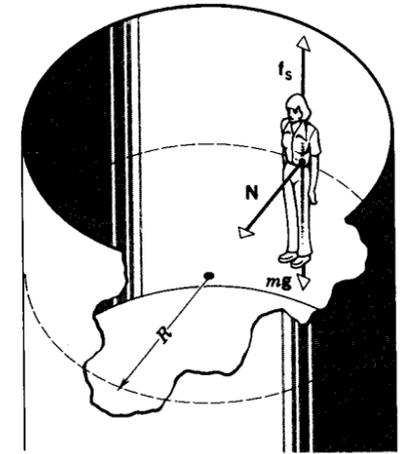


Figura 9 El rotor. Se muestran las fuerzas que actúan sobre la persona.

Esta ecuación relaciona al coeficiente de fricción necesario para impedir el deslizamiento con la velocidad tangencial de un objeto sobre la pared. Nótese que el resultado no depende del peso de la persona.

Como práctica, el coeficiente de fricción entre el material textil de la ropa que viste el pasajero y la pared típica de un rotor (lona) es de alrededor de 0.40. Para un rotor típico el radio es de 2.0 m, de modo que  $v$  debe ser alrededor de 7.0 m/s o más. La circunferencia de la trayectoria circular es  $2\pi R = 12.6$  m, y a 7.0 m/s le toma un tiempo de  $t = 12.6 \text{ m}/(7.0 \text{ m/s}) = 1.80$  s completar cada revolución. El aparato debe, por lo tanto, girar a razón de cuando menos  $1/1.80 \text{ s} = 0.56$  revoluciones/s o alrededor de 33 rpm, la misma tasa de rotación que el plato de un fonógrafo.

### La curva peraltada

Hagamos que el bloque de la figura 10a represente a un automóvil o a un carro de ferrocarril que se mueve a velocidad constante  $v$  sobre una vía a nivel en una curva que tenga un radio de curvatura  $R$ . En adición a las dos fuerzas verticales, es decir, el peso  $mg$  y la fuerza normal  $N$ , debe actuar sobre el carro una fuerza horizontal  $\mathbf{P}$ . La fuerza  $\mathbf{P}$  proporciona la fuerza centrípeta necesaria para el movimiento en círculo. En el caso del automóvil esta fuerza es proporcionada por la fuerza lateral de fricción que ejerce la carretera sobre las llantas; en el caso del carro de ferrocarril la fuerza es proporcionada por los rieles al ejercer una fuerza lateral sobre el borde interior de las ruedas del carro. En aras de la seguridad, no podemos confiar en que cualquiera de estas fuerzas laterales sea lo suficientemente grande en todo momento, y ambas causan un desgaste innecesario. Por lo tanto, la

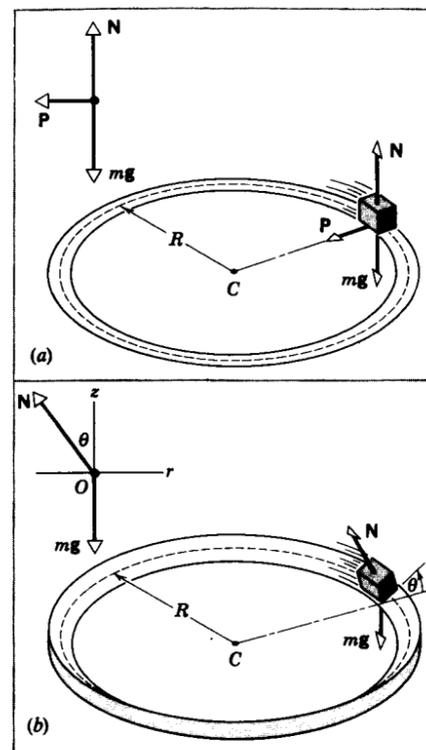


Figura 10 (a) Una vía a nivel. Se muestra a la izquierda el diagrama de cuerpo libre del cuerpo en movimiento. La fuerza centrípeta debe ser proporcionada por la fricción entre las llantas y la vía. (b) Una vía peraltada. No es necesaria la fricción para tomar la curva con seguridad.

vía está *peraltada* en las curvas, como se muestra en la figura 10b. En este caso, la fuerza normal  $N$  no solamente tiene una componente vertical, como antes, sino también una componente horizontal que proporciona la fuerza centrípeta necesaria para un movimiento circular uniforme. Por lo tanto, no se necesita ninguna fuerza lateral adicional en una vía que esté apropiadamente peraltada para vehículos de determinada velocidad.

En ausencia de la fricción, el ángulo  $\theta$  correcto de peralte puede obtenerse como sigue. Comenzamos, como es usual, con la segunda ley de Newton, y nos referimos al diagrama de cuerpo libre que se muestra en la figura 10b. No existe una aceleración vertical, de modo que la componente vertical da

$$\sum F_z = N \cos \theta - mg = ma_z = 0.$$

La componente radial de la fuerza normal es  $-N \cos \theta$ , y la aceleración radial es  $-v^2/R$ . La componente radial de la segunda ley de Newton nos da, por lo tanto,

$$\sum F_r = -N \sin \theta = ma_r = -mv^2/R.$$

Dividiendo estas dos ecuaciones, obtenemos

$$\tan \theta = v^2/Rg. \quad (8)$$

Nótese que el ángulo de peralte apropiado depende de la velocidad del carro y de la curvatura del camino. No depende de la masa del carro; para un ángulo de peralte determinado, todos los carros podrán viajar con seguridad. Para una curvatura determinada, el camino está peraltado a un ángulo correspondiente a una velocidad promedio esperada. A menudo las curvas se marcan con señales que anuncian la velocidad apropiada para la que el camino ha sido peraltado. Si los vehículos exceden esa velocidad, la fricción entre las llantas y el camino debe proporcionar la fuerza centrípeta adicional necesaria para tomar la curva con seguridad.

Compruebe la fórmula de peraltado para los casos límite  $v = 0$ ,  $R \rightarrow \infty$ ,  $v$  grande, y  $R$  pequeño. También, nótese que la ecuación 8, si se resuelve para  $v$ , da el mismo resultado que la que derivamos para la velocidad de la pesa de un péndulo cónico. Compare las figuras 8 y 10, observando sus semejanzas.

### 6-4 ECUACIONES DEL MOVIMIENTO: FUERZAS CONSTANTES Y NO CONSTANTES\*

Revisemos brevemente nuestro progreso en el estudio de la dinámica y de la cinemática. Nuestro objetivo final es describir cómo se mueve una partícula cuando actúan sobre ella un grupo de fuerzas. Esquemáticamente, el análisis (en una dimensión) puede ser representado como sigue:

$$\sum F \rightarrow a \rightarrow x(t), v(t).$$

Esto es, las leyes de Newton (como se describieron en el capítulo 5) nos proporcionan los medios para calcular la aceleración de una partícula a partir de la fuerza neta que actúa sobre ella. El siguiente paso es el matemático para obtener la posición y la velocidad (en todo tiempo  $t$ ) a partir de la aceleración y la posición y velocidad iniciales.

Con excepción de la sección anterior sobre el movimiento circular, hasta ahora hemos considerado solamente fuerzas constantes (es decir, fuerzas que no dependen del tiempo, la velocidad, o la posición). Si la fuerza es constante, entonces la aceleración es constante, y para una aceleración constante las soluciones para  $v(t)$  y  $x(t)$  en una dimensión se obtienen fácilmente, como lo hicimos

\* Las secciones 6-4 a 6-7 implican aspectos elementales del cálculo integral. El material de estas secciones puede omitirse o posponerse hasta que el estudiante esté más familiarizado con los métodos de la integración.

en la sección 2-6. Entonces nuestro análisis de las fuerzas constantes está completo.

Cuando las fuerzas no son constantes, todavía podemos usar las leyes de Newton para hallar la aceleración, pero ciertamente no podemos usar las fórmulas para la aceleración constante de la sección 2-6 para hallar  $v(t)$  y  $x(t)$ . En su lugar, debemos remitirnos a los métodos que implican al cálculo integral.

Antes de aplicar nuestro análisis al caso de fuerzas no constantes, apliquemos el cálculo integral en el caso de fuerzas constantes y veamos cómo se obtienen los resultados de la sección 2-6. Supongamos que hemos hallado la aceleración  $a$  (de las leyes de Newton) y que deseamos obtener  $v(t)$  y  $x(t)$ . Comencemos con  $a = dv/dt$ , y así

$$dv = a dt. \quad (9)$$

Integramos ahora ambos lados. En el lado izquierdo, la velocidad es la variable de integración, con los límites de  $v_0$  para el tiempo 0 y  $v$  para el tiempo  $t$ . En la derecha, integramos sobre el tiempo entre 0 y  $t$ .

$$\int_{v_0}^v dv = \int_0^t a dt. \quad (10)$$

En el caso de la aceleración constante,  $a$  sale de la integral de la derecha y obtenemos

$$v - v_0 = a \int_0^t dt \quad (11)$$

o sea

$$v(t) = v_0 + at \quad (12)$$

la cual es justamente la ecuación 15 del capítulo 2.

Continuando, hallamos  $x(t)$  usando  $v = dx/dt$  para tener otra integral:

$$dx = v dt = (v_0 + at)dt = v_0 dt + at dt. \quad (13)$$

Integramos de la posición  $x_0$  en el tiempo 0 a la posición  $x$  en el tiempo  $t$ :

$$\int_{x_0}^x dx = \int_0^t v_0 dt + \int_0^t at dt, \quad (14)$$

y si  $a$  es constante podemos de nuevo sacarla de la integral:

$$\begin{aligned} x - x_0 &= v_0 \int_0^t dt + a \int_0^t t dt \\ &= v_0 t + a(\frac{1}{2}t^2) \end{aligned}$$

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2. \quad (15)$$

Esta ecuación es idéntica a la ecuación 19 del capítulo 2.

Si la aceleración no es constante, es más complicado evaluar las integrales. El hecho de que las integrales de las

ecuaciones 10 y 14 obtengan funciones explícitas para  $v(t)$  y  $x(t)$  se llama enfoque *analítico* para resolver el problema. Una alternativa es el método *numérico*, mediante el cual podemos usar una computadora para evaluar las integrales, obteniendo no las funciones analíticas  $v(t)$  y  $x(t)$ , sino los valores numéricos de  $v$  y de  $x$  para cualquier tiempo  $t$ . Esto puede hacerse a cualquier nivel de precisión deseado.

Las fuerzas constantes demuestran las aplicaciones de las leyes de Newton, y son ciertamente más fáciles de trabajar que las fuerzas no constantes. Es una fortuna que los problemas prácticos incluyan a menudo fuerzas que pueden ser consideradas bajo muchas circunstancias como aproximadamente constantes: la gravedad cerca de la superficie de la Tierra, las fuerzas de fricción, las fuerzas de tensión en cables, y tantas otras. Sin embargo, muchas situaciones físicas no quedan bien descritas por las fuerzas constantes, en cuyos casos debemos usar técnicas analíticas o numéricas para resolver el problema. He aquí algunos ejemplos de estas fuerzas:

1. *Fuerzas que dependen del tiempo.* En el capítulo 2 analizamos el frenado de un automóvil *suponiendo* que la aceleración era constante. En la práctica, rara vez es éste el caso. Bajo muchas circunstancias, especialmente a alta velocidad, solemos, por lo general, accionar los frenos lentamente al principio y luego con más fuerza cuando el auto se va deteniendo. La fuerza de frenado depende, por tanto, del tiempo durante el intervalo en que se detiene el automóvil; la función  $a(t)$  dependerá de los detalles de cómo apliquemos los frenos.

Otro ejemplo de una fuerza que depende del tiempo ocurre en el caso de una onda que viaja a través de un medio. Consideremos una onda sonora en el aire, donde, para cualquier posición dada, la onda varía sinusoidalmente con el tiempo. La fuerza que actúa sobre cada una de las moléculas de aire por separado variará también sinusoidalmente con el tiempo, con la misma frecuencia que la onda. La aceleración de la partícula tendrá la misma dependencia del tiempo que la fuerza.

2. *Fuerzas que dependen de la velocidad.* Un ejemplo conocido de una fuerza dependiente de la velocidad es la fuerza de arrastre que experimenta un cuerpo que se mueve en un medio fluido tal como el aire o el agua. Esta fuerza de fricción aumenta con la velocidad. Usted habrá encontrado este efecto cuando trata de caminar en una alberca. Si camina lentamente, siente sólo una fuerza resistiva pequeña, pero si trata de caminar rápidamente, las fuerzas resistivas sobre sus piernas pueden ser bastante grandes. Cuanto más rápido trate de moverse, mayor será la fuerza de arrastre.

El movimiento de los proyectiles se ve extraordinariamente afectado por las fuerzas de arrastre, aun cuando en los capítulos 2 y 4 los tuvimos en cuenta en nuestro análisis de cuerpos en caída y proyectiles. Para una velo-

cidad inicial determinada, un proyectil tal como una bola de béisbol tiene un alcance en el aire de la mitad o menos del que se esperaría si nos basáramos en el análisis de la sección 4-3. Un cuerpo lanzado a una distancia grande no responderá a las ecuaciones de la caída libre de la sección 2-7, las cuales parecen permitir que su velocidad aumente sin límite. En su lugar, a medida que la velocidad aumenta lo hará también la fuerza de arrastre, la cual tiende a reducir o incluso impedir incrementos adicionales de la velocidad. De hecho, como veremos en la sección 6-7, la velocidad tiende a un límite (la *velocidad terminal*) más allá del cual no habrá una aceleración. (Para muchos objetos, este efecto ocurre sólo a una velocidad considerablemente alta, siguiendo luego caídas a través de distancias del orden de 100 m o más. Para una caída de 1 ó 2 metros en nuestros experimentos de laboratorio, el efecto es despreciable y podemos usar las ecuaciones de la sección 2-7 con confianza.)

**3. Fuerzas que dependen de la posición.** Un ejemplo familiar de una fuerza dependiente de la posición es la fuerza de restitución ejercida por un resorte estirado a una distancia  $x$  de su longitud de equilibrio:  $F = -kx$ . La aceleración experimentada por un cuerpo de masa  $m$  unido al resorte es, entonces,  $a = F/m = -kx/m$ . Si desplazamos al cuerpo una distancia  $x$ , experimenta una fuerza que tiende a regresarlo hacia su posición de equilibrio. Si soltamos el cuerpo, se mueve hacia la posición de equilibrio; al hacerlo, el desplazamiento  $x$  disminuye, así como también la aceleración. Mientras pasa por la posición de equilibrio, su aceleración es instantáneamente cero, pero la aceleración aumenta en magnitud de nuevo mientras se mueve más allá de  $x = 0$ .

Las fuerzas dependientes de la posición se analizan con más facilidad usando técnicas de trabajo y energía, las cuales discutiremos en los capítulos 7 y 8. En las secciones próximas demostraremos algunos métodos que emplean las leyes de Newton para analizar situaciones donde aparecen fuerzas que dependen del tiempo y de la velocidad.

### 6-5 FUERZAS DEPENDIENTES DEL TIEMPO: MÉTODOS ANALÍTICOS

Usando las leyes de Newton de la manera usual, con algunas de las fuerzas dependiendo del tiempo, obtenemos una aceleración  $a(t)$  que depende del tiempo. En este caso podemos proceder exactamente como lo hicimos en la sección 6-4 para hallar la velocidad por integración directa. Recordando que  $a = dv/dt$ , escribimos que  $dv = a(t) dt$  e integramos desde el tiempo  $t = 0$ , cuando la velocidad inicial es  $v_0$ , hasta el tiempo  $t$ , cuando la velocidad es  $v$ . Para simplificar suponemos que el movimiento

está confinado a una dimensión, pero la extensión a tres dimensiones es fácil. Procedemos como sigue:

$$\int_{v_0}^v dv = \int_0^t a(t) dt,$$

$$v - v_0 = \int_0^t a(t) dt,$$

$$v(t) = v_0 + \int_0^t a(t) dt. \quad (16)$$

Comparemos el grupo de ecuaciones de arriba con las ecuaciones 10 a 12; la única diferencia es que  $a$  permanece dentro de la integral.

Una vez que tengamos a  $v(t)$ , podemos repetir el procedimiento para hallar a  $x(t)$ . Con  $v = dx/dt$ , tenemos que  $dx = v(t) dt$ , y llevando a cabo una integral similar desde el tiempo  $t = 0$ , cuando la partícula se localiza en  $x_0$ , hasta el tiempo  $t$ , cuando la posición es  $x$ , tendremos lo siguiente:

$$\int_{x_0}^x dx = \int_0^t v(t) dt,$$

$$x - x_0 = \int_0^t v(t) dt,$$

$$x(t) = x_0 + \int_0^t v(t) dt. \quad (17)$$

Una vez más, comparemos con las ecuaciones 14 y 15 y notemos cómo la ecuación 17 se reduce a la ecuación 15 cuando  $a$  sea constante.

**Problema muestra 4** Un automóvil se mueve a 105 km/h (unas 65 mi/h ó 29.2 m/s). El conductor comienza a accionar súbitamente los frenos, pero lo hace con fuerza creciente de modo que la deceleración aumenta con el tiempo de acuerdo con  $a(t) = ct$ , donde  $c = -2.67 \text{ m/s}^2$ . (a) ¿Cuánto tiempo transcurrirá antes de que el automóvil llegue al reposo? (b) ¿Qué distancia recorre en el proceso?

**Solución** (a) Necesitamos una expresión para  $v(t)$ , de modo que podamos hallar el tiempo para el cual  $v = 0$ . Usando la ecuación 16 con  $a(t) = ct$ , tenemos que

$$v(t) = v_0 + \int_0^t ct dt = v_0 + \frac{1}{2}ct^2.$$

Haciendo que  $v(t)$  sea igual a cero, podemos resolver para el tiempo  $t$ , en el cual el automóvil llega al reposo:

$$0 = v_0 + \frac{1}{2}ct^2,$$

$$t_1 = \sqrt{\frac{-2v_0}{c}} = \sqrt{\frac{-2(29.2 \text{ m/s})}{-2.67 \text{ m/s}^2}} = 4.68 \text{ s}.$$

Al automóvil le toma 4.68 s llegar al reposo.

(b) Para hallar qué distancia recorre el automóvil, necesitamos una expresión para  $x(t)$ , para lo cual debemos integrar a  $v(t)$  de acuerdo con la ecuación 17:

$$x(t) = x_0 + \int_0^t (v_0 + \frac{1}{2}ct^2) dt = x_0 + v_0t + \frac{1}{6}ct^3.$$

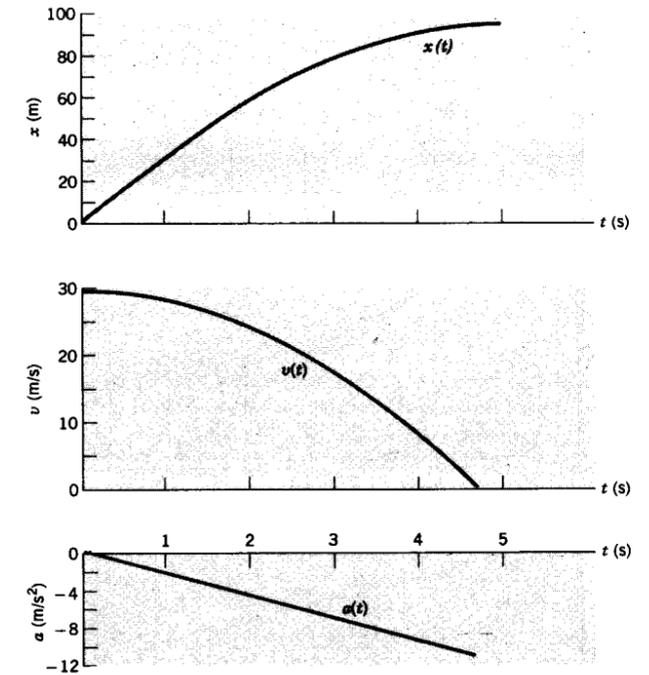
Con  $t = t_1 = 4.68 \text{ s}$ , la distancia recorrida es (haciendo a  $x_0$  igual a cero)

$$x(t_1) = 0 + (29.2 \text{ m/s})(4.68 \text{ s}) + \frac{1}{6}(-2.67 \text{ m/s}^2)(4.68 \text{ s})^3$$

$$= 91.0 \text{ m}.$$

La figura 11 muestra la dependencia del tiempo de  $x$ ,  $v$ , y  $a$ . En contraste con el caso de la aceleración constante,  $v(t)$  no es una línea recta.

Con este método de frenar, la mayoría del cambio de velocidad ocurre cerca del final del movimiento. El cambio de velocidad en el primer segundo después de haber aplicado los frenos es sólo de 1.3 m/s (unas 3 mi/h); en el último segundo, sin embargo, el cambio es de 11.2 m/s (unas 25 mi/h). (Recordemos que en el caso de la aceleración constante, el cambio de velocidad es el mismo en intervalos de tiempo iguales.) ¿Puede usted pensar en las ventajas de frenar de esta manera? ¿Existen también desventajas?



**Figura 11** Problema muestra 4. La posición  $x(t)$  y la velocidad  $v(t)$  deducidas se muestran correspondiendo con  $a(t)$ , la cual varía linealmente con el tiempo.

### 6-6 FUERZAS DEPENDIENTES DEL TIEMPO: MÉTODOS NUMÉRICOS (Opcional)

El procedimiento analítico descrito en la sección anterior nos permite en principio calcular  $x(t)$  y  $v(t)$  para cualquier  $a(t)$  dada. Sin embargo, a menudo este método no es práctico ni deseable. Por ejemplo, puede no existir una forma analítica para las integrales, o quizá la forma es tan complicada que las soluciones no contribuyen a nuestra visión física del problema. Las técnicas numéricas ofrecen una alternativa conveniente a los métodos analíticos, y son, por supuesto, particularmente útiles en ejemplos en que no pueda usarse el método analítico.

En el método numérico, aproximamos el problema dividiendo el intervalo, sobre el que deseamos hallar la solución, en un número grande de intervalos pequeños. En cada intervalo aplicamos las ecuaciones de la aceleración constante, pero esa "constante" cambia de un intervalo al otro. Una elección conveniente para la aceleración constante en cada intervalo es la aceleración promedio en el intervalo.

Este método trabaja mejor, y da los resultados más precisos, si hacemos los intervalos tan pequeños como sea posible; cuanto más pequeño sea el intervalo, mejor se aproximará la aceleración promedio (constante) a la aceleración real. Por otra parte, cuando disminuimos el tamaño de los intervalos, debemos aumentar correspondientemente su número, y podemos por tanto necesitar hacer muchos cálculos repetitivos. Ésta es justamente la tarea que las computadoras hacen muy bien, y así este método de solución puede hacerse en una computadora a cualquier nivel de precisión deseado.

La figura 12 muestra gráficamente cómo se lleva a cabo este procedimiento en el caso del problema con aceleración variable que resolvimos en el problema muestra 4. La región entre  $t = 0$  y  $t = 5$  se divide en 10 intervalos pequeños, cada uno de anchura  $\delta t = 0.5 \text{ s}$ . La función  $a(t)$  es aproximada en cada intervalo por una constante diferente (la aceleración promedio, que en este

caso lineal es también el valor de  $a$  en el punto medio del intervalo). En el primer intervalo, la aceleración promedio se determina de los valores de  $a$  en  $t = 0$  y  $t = 0.5 \text{ s}$ :

$$\bar{a}_1 = \frac{1}{2}[a(0) + a(0.5 \text{ s})] = \frac{1}{2}[0 + (-2.67 \text{ m/s}^2)(0.5 \text{ s})]$$

$$= -0.67 \text{ m/s}^2.$$

El cambio de la velocidad en el primer intervalo,  $\delta v_1$ , es aproximadamente

$$\delta v_1 = \bar{a}_1 \delta t = (-0.67 \text{ m/s}^2)(0.5 \text{ s}) = -0.34 \text{ m/s},$$

y la velocidad en  $t = 0.5 \text{ s}$  es, por lo tanto,

$$v_1 = v_0 + \delta v_1 = 29.2 \text{ m/s} - 0.34 \text{ m/s} = 28.9 \text{ m/s}.$$

Para hallar el desplazamiento durante el primer intervalo, primero hallamos la velocidad promedio durante ese intervalo:

$$\bar{v}_1 = \frac{1}{2}(v_0 + v_1) = \frac{1}{2}(29.2 \text{ m/s} + 28.9 \text{ m/s}) = 29.1 \text{ m/s},$$

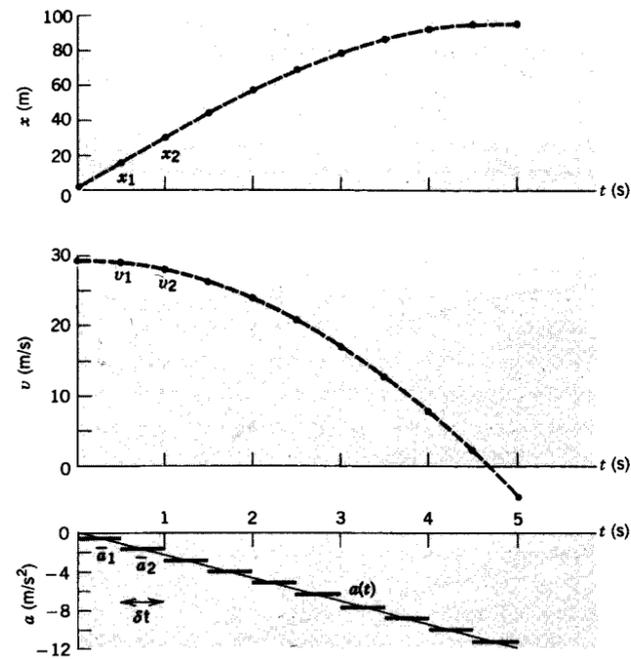
y el desplazamiento  $\delta x_1$  en ese intervalo es aproximadamente

$$\delta x_1 = \bar{v}_1 \delta t = (29.1 \text{ m/s})(0.5 \text{ s}) = 14.6 \text{ m}.$$

Si asignamos el punto de partida como  $x_0 = 0$ , entonces la posición al final del primer intervalo es la siguiente:

$$x_1 = x_0 + \delta x_1 = 0 + 14.6 \text{ m} = 14.6 \text{ m}.$$

Los valores de  $v_1$  y de  $x_1$  están trazados para  $t = 0.5 \text{ s}$  en la figura 12.



**Figura 12** Solución numérica (mostrada como puntos) al problema muestra 4; compare con la solución analítica (Fig. 11 y curvas con líneas entrecortadas). Se supone que la aceleración es constante para cada uno de los intervalos de 0.5 s, y que la posición y la velocidad pueden calcularse al final del intervalo, dando los puntos trazados. Tomando más intervalos (y más pequeños) nos daría más puntos y curvas menos pronunciadas para  $x(t)$  y  $v(t)$ .

Nos movemos ahora al segundo intervalo y repetimos el procedimiento. Aquí la aceleración promedio es

$$\begin{aligned} \bar{a}_2 &= \frac{1}{2}[a(0.5 \text{ s}) + a(1.0 \text{ s})] \\ &= \frac{1}{2}[(-2.67 \text{ m/s}^2)(0.5 \text{ s}) + (-2.67 \text{ m/s}^2)(1.0 \text{ s})] \\ &= -2.00 \text{ m/s}^2. \end{aligned}$$

Continuando como lo hicimos para el primer intervalo, en el segundo intervalo

$$\begin{aligned} \delta v_2 &= \bar{a}_2 \delta t = (-2.00 \text{ m/s}^2)(0.5 \text{ s}) = -1.0 \text{ m/s}, \\ v_2 &= v_1 + \delta v_2 = 28.9 \text{ m/s} - 1.0 \text{ m/s} = 27.9 \text{ m/s}, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \bar{v}_2 &= \frac{1}{2}(v_1 + v_2) = \frac{1}{2}(28.9 \text{ m/s} + 27.9 \text{ m/s}) = 28.4 \text{ m/s}, \\ \delta x_2 &= \bar{v}_2 \delta t = (28.4 \text{ m/s})(0.5 \text{ s}) = 14.2 \text{ m}, \\ x_2 &= x_1 + \delta x_2 = 14.6 \text{ m} + 14.2 \text{ m} = 28.8 \text{ m}. \end{aligned}$$

Los valores de  $v_2$  y de  $x_2$  dan la velocidad y la posición al final del segundo intervalo, y están trazados para  $t = 1.0 \text{ s}$  en la figura 12.

Continuando igual para los 10 intervalos, hallamos los puntos restantes trazados en la figura 12.

Al comparar las figuras 11 y 12, podemos ver lo bien que la solución numérica concuerda con la analítica, aun para tan pocos como 10 intervalos. Una computadora podría hacer fácilmente este cálculo para 100 o para 1000 intervalos, de modo que los puntos trazados para  $x$  y para  $v$  aparecerían casi como curvas lisas.

Interpolando entre los puntos finales de la velocidad del último intervalo, vemos que el automóvil se detiene en 4.7 s aproximadamente, tal como lo hallamos en la solución analítica. Al calcular la distancia viajada de la figura 12, hallamos alrededor de 91 m, nuevamente de acuerdo con el valor analítico.

El valor negativo hallado para  $v$  al final del décimo intervalo no es, por supuesto, significativo en este problema: la situación dinámica original no permite valores negativos, porque al accionar los frenos no provoca que el automóvil se mueva hacia atrás. Es conveniente para nosotros continuar con el cálculo numérico hasta ese punto, para ayudarnos a analizar el último intervalo.

En el apéndice I, el lector encontrará un programa de computadora (en lenguaje BASIC), que puede hacer este cálculo. Mediante unos pequeños cambios en el programa, el lector puede hacer este tipo de cálculo para cualquier forma de  $a(t)$ . ■

### 6-7 FUERZAS DE ARRASTRE Y EL MOVIMIENTO DE PROYECTILES

La lluvia cae de las nubes cuya altura  $h$  sobre el nivel del suelo es de unos 2 km. Utilizando nuestra ecuación para los cuerpos en caída libre (Ec. 25 del capítulo 2), sabremos que la lluvia caerá al suelo a una velocidad de  $v = \sqrt{2gh} \approx 200 \text{ m/s}$ , o de alrededor de 440 mi/h. El impacto de un proyectil, incluso de las gotas de lluvia, a esta velocidad sería mortal; puesto que las gotas de lluvia se mueven a velocidades mucho más bajas, es obvio que hemos cometido un error en algún paso de nuestro cálculo.

El error acontece si no tomamos en cuenta el efecto que ejerce la fuerza de fricción del aire en las gotas de lluvia al caer. Esta fuerza de fricción es un ejemplo de la fuerza de arrastre que experimenta todo objeto que se mueve en un medio fluido. Las fuerzas de arrastre tienen efectos importantes en una gran cantidad de objetos, como las pelotas de béisbol, que se desvían en forma considerable de la trayectoria ideal de libre arrastre, o los esquiadores al descender por una ladera, quienes tratan de dar al cuerpo una posición aerodinámica con el fin de reducir la fuerza de arrastre. Estas fuerzas deben tomarse en cuenta en el diseño de aeronaves y embarcaciones. Desde el punto de vista de los cuerpos en caída, desde las gotas de lluvia hasta los paracaidistas las fuerzas de arrastre impiden que la velocidad crezca sin límite e imponen una velocidad máxima o *terminal* que puede ser alcanzada por un cuerpo al caer.

Una característica peculiar de las fuerzas de arrastre es que dependen de la velocidad: cuanto más aprisa se mueva el objeto, mayor será la fuerza de arrastre. Por lo tanto,

debemos usar métodos de cálculo con integrales para analizar la cinemática.

Cuando la fuerza, y por lo tanto la aceleración, es una función de la velocidad, los métodos de la sección 6-5 para las fuerzas dependientes del tiempo deben modificarse un tanto. Comenzamos, como lo hicimos en la ecuación 16, con  $a = dv/dt$ , pero ahora  $a$  es una función de la velocidad,  $a(v)$ :

$$\begin{aligned} a(v) &= \frac{dv}{dt} \\ \frac{dv}{a(v)} &= dt. \end{aligned}$$

Esto puede ahora ser integrado directamente:

$$\int_{v_0}^v \frac{dv}{a(v)} = \int_0^t dt = t. \quad (18)$$

El lado izquierdo de la ecuación 18 da alguna función de  $v$ , por lo que la ecuación 18 es en efecto  $t$  en función de  $v$ , o  $t(v)$ , en lugar de  $v(t)$ . A menudo nos es posible "invertir" este resultado para hallar  $v(t)$ , la cual es generalmente más útil en los cálculos.

**Problema muestra 5** Supongamos que un objeto de masa  $m$  que cae en el aire experimenta una fuerza de arrastre  $D$  que aumenta *linealmente* con la velocidad,

$$D = bv,$$

y que actúa siempre en dirección opuesta a la velocidad. La constante  $b$  depende de las propiedades del objeto (su tamaño y forma, por ejemplo) y de las propiedades del fluido (especialmente de su densidad). Halle la velocidad en función del tiempo,  $v(t)$ , para un objeto de masa  $m$  que se deja caer desde el reposo.

**Solución** La figura 13 muestra el diagrama de cuerpo libre, el cual cambia con el tiempo porque  $D$  varía con  $v$ . Cuando el objeto se deja caer,  $D$  es cero (porque  $v$  es cero), y  $D$  aumenta con  $v$ . En cierto punto del movimiento  $D = mg$  y el objeto no tiene una fuerza neta que actúe sobre él y, por lo tanto, no tiene aceleración, como en la figura 13c. A partir de este punto la velocidad permanece constante. Nuestra solución matemática mostraría esta propiedad.

La segunda ley de Newton para este problema es

$$\sum F = D + mg = ma.$$

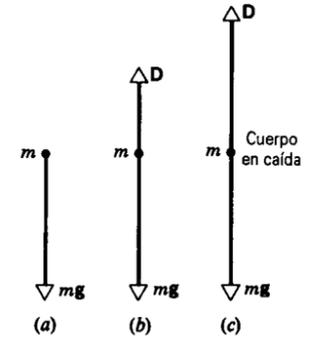
Elegimos al eje y hacia abajo, de modo que la componente vertical sea

$$\sum F_y = mg - bv = ma,$$

o bien

$$a = g - \frac{b}{m}v.$$

De esta expresión podemos ver que cuando  $v$  aumenta, finalmente llegamos a alcanzar un punto donde el lado derecho se convierte en cero, cuando  $bv/x = g$ . En este punto  $a = 0$ , y



**Figura 13** Fuerzas que actúan sobre un cuerpo que cae en el aire. (a) En el instante que se deja caer,  $v = 0$  y no existe fuerza de arrastre. (b) La fuerza de arrastre aumenta a medida que el cuerpo gana velocidad. (c) Finalmente la fuerza de arrastre se iguala al peso; durante cualquier tiempo posterior permanece igual al peso y el cuerpo cae a su velocidad terminal constante.

permanece cero durante el resto del movimiento, de modo que la velocidad permanece constante desde ese punto en adelante. Ésta es la velocidad terminal,  $v_T = mg/b$ .

Para hallar  $v(t)$ , usamos la ecuación 18 con  $v_0 = 0$ :

$$\int_0^v \frac{dv}{g - (b/m)v} = t.$$

La integral puede ser escrita así:

$$-\frac{m}{b} \int_0^v \frac{-b dv}{mg - bv}$$

que es de la forma  $\int du/u = \ln u$ , donde  $u = mg - bv$ . Así,

$$\begin{aligned} -\frac{m}{b} \int_0^v \frac{-b dv}{mg - bv} &= -\frac{m}{b} \ln (mg - bv) \Big|_0^v \\ &= -\frac{m}{b} \ln (mg - bv) + \frac{m}{b} \ln (mg) \\ &= -\frac{m}{b} \ln \left( \frac{mg - bv}{mg} \right) = t. \end{aligned}$$

Esta expresión es una razón perfectamente aceptable entre  $v$  y  $t$ , pero es un tanto más fácil de usar e interpretar si la invertimos para hallar  $v(t)$ :

$$\begin{aligned} \ln \left( \frac{mg - bv}{mg} \right) &= -\frac{bt}{m} \\ \frac{mg - bv}{mg} &= e^{-bt/m}, \end{aligned}$$

y finalmente, resolviendo para  $v$ ,

$$v(t) = \frac{mg}{b} (1 - e^{-bt/m}). \quad (19)$$

Cuando  $t$  es pequeña (cerca del comienzo de la caída del proyectil), podemos aproximar la exponencial mediante  $e^x \approx 1 + x$  para una  $x$  pequeña ( $x \ll 1$ ). Entonces

$$v(t) \approx \frac{mg}{b} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{bt}{m} \right) \right] = gt \quad (\text{pequeño } t).$$